QUASIOPTIMALE FEHLERABSCHÄTZUNGEN FÜR DAS RITZ-GALERKIN-VERFAHREN BEI EINER KLASSE NICHTLINEARER HINDERNISPROBLEME

KARLHEINZ HAFNER

Diss
München
1984

Quasioptimale Fehlerabschätzungen für das Ritz-Galerkin-Verfahren bei einer Klasse nichtlinearer Hindernisprobleme

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Karlheinz Hafner
aus Stadtbergen

---

eingereicht am 22.12.1983

1. Berichterstatter : Prof. Dr. G. Hämmerlin

2. Berichterstatter : Prof. Dr. J. Batt

Tag der mündlichen Prüfung : 16.7.1984

Herstellung: Hieronymus Buchreproduktions GmbH, München

INHALT

§1. EINLEITUNG UND INHALTSÜBERSICHT 1

§2. HINDERNISPROBLEME 8

2.1 Konventionen 8
2.2 Problemstellung 10

§3. MONOTONE DIFFERENTIALOPERATOREN 17

3.1 Differenzierbare Operatoren 17
3.2 Nichtlineare elliptische partielle Differentialoperatoren 32
3.3 Monotonieeigenschaften 43

§4. DISKRETISIERUNG VON HINDERNISPROBLEMEN 53

§5. FEHLERABSCHÄTZUNGEN IN DER ENERGIENORM 60

§6. L_∞ - NORM ABSCHÄTZUNGEN 67

6.1 Starke diskrete Inversmonotonie 67
6.2 Abschätzung des L_∞ - Fehlers 86

§7. NUMERISCHE BEHANDLUNG VON HINDERNISPROBLEMEN 101

7.1 Die Lösung von Hindernisproblemen im $\mathbb{R}^n$ 101
7.2 Konstruktion von Testbeispielen 115
7.3 Numerische Ergebnisse 127

ZUSAMMENFASSUNG 131

LITERATUR 132

EZEICHNUNGEN UND ABKÜRZUNGEN

i.j.k)	k-te numerierte Formel im j-ten Abschnitt des i-ten Paragraphen
i.k)	analog, falls der i-te Paragraph keine Unterabschnitte hat
.j.k	analog für Definitionen, Beispiele, Lemmas, Sätze, Korollarien
A1),(A2),(A3)	siehe S.32f
A1+),(A3+)	siehe S.68f
A4)	siehe S.107f
•,•>	duale Paarung
'	stetiges Dual eines normierten Raums X
(X,Y)	Raum der stetigen linearen Operatoren $X \to Y$, versehen mit der Operatornorm
$_k$(X,Y)	analog für k-lineare Operatoren $X^k \to Y$
eas(K)	zweidimensionales Lebesgue-Maß einer meßbaren Menge $K \subset \mathbb{R}^2$
eas$_1$(Γ)	eindimensionales Lebesgue-Maß einer Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$
t	Transponierte eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$
	Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$
•|	Absolutbetrag; Norm eines Vektors im $\mathbb{R}^2$; Vektor der Absolutbeträge eines Vektors im $\mathbb{R}^n$
,b,f,α,β,γ$_1$,γ$_2$	siehe (A1)
$_0$,γ$_0$,μ$_1$,μ$_2$	siehe (A3)
(Ω,κ)	siehe S.43 ff
(Ω)	c(Ω) := c(Ω,∞)
$_h$, $\tilde{T}_h$	siehe S.55f
$_h$, $\tilde{\Omega}_h$	siehe S.55f
$_K$, ρ_K, h, σ	siehe S.56
	siehe S.58

λ_i	Lagrange-Basisfunktion, siehe S.56f
$\P_h$	Interpolationsoperator, siehe S.57
$E_{m,p}$	Fortsetzungsoperator, siehe S.58
1_h	"innere 1-Funktion", siehe S.72
$H_g^1(\Omega)$	siehe S.10
$\mathbb{K}$	Konkurrenzklasse, siehe S.11
S_h , $S_h(\Omega_h)$	diskrete Ansatzräume, siehe S.56
S_h'	siehe S.59
$\mathbb{K}_h$	diskrete Konkurrenzklasse, siehe S.59
S_{h,g_h}	siehe S.72
$\mathbf{K}$	siehe S.102
Ω°	Kontaktmenge, siehe S.14
Ω^+	Menge der freien Punkte, siehe S.14

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544309_0006

§1. EINLEITUNG UND INHALTSÜBERSICHT

Unter Hindernisproblemen versteht man verallgemeinerte Randwertprobleme für elliptische partielle Differentialoperatoren, bei denen zusätzliche Nebenbedingungen an die Lösung u^* in Form sogenannter Hindernisbedingungen $u^* \geq \chi$ auftreten. Genauer gesagt handelt es sich dabei um eine schwache Formulierung freier Randwertprobleme, das sind Aufgaben, in denen die Form des Grundgebietes (der freie Rand) mit zu den gesuchten Größen der Problemstellung gehört.

Aufgabenstellungen dieser Art treten in vielen Bereichen auf.

Als Beispiel für rein mathematische Fragestellungen sei etwa das Plateausche Problem mit Hindernis genannt (siehe [77], [11]).

Besondere Bedeutung erlangten diese Aufgaben durch die Tatsache, daß die mathematische Beschreibung vieler Problemkreise aus den Ingenieurwissenschaften auf solche Formulierungen führt. Aus der Fülle von Beispielen, für die auch schon mathematische Modelle in Gestalt von Hindernisproblemen für elliptische Differentialoperatoren entwickelt wurden, nennen wir

die Sickerströmung von Flüssigkeiten durch poröse Medien, das sogenannte Dammproblem (siehe [5], [6]),

das Studium der zweidimensionalen Potentialströmung perfekter Fluide (siehe [18], [19], [14], [29], [87]),

die mathematische Beschreibung des Kielwassers einer zweidimensionalen Strömung (siehe [15], [12]),

die Untersuchung der Schmierung von Achslagern (siehe [34], [24], [8]),

die Beschreibung des elektrochemischen Fräsens (siehe [37]),

in der Mechanik etwa die mathematische Formulierung der elastoplastischen Torsion (siehe [48; Chap. III, S.117ff]),

die Berechnung von Vorgängen der Halbleiterphysik (siehe [51]).

Die Theorie der Variationsungleichungen bildet den Rahmen für die mathematische Untersuchung von Hindernisproblemen. Die Aufgabe

(1.1) finde $u^* \in \mathbb{K}$, so daß für alle $v \in \mathbb{K}$ gilt
$\langle Au^*, v-u^* \rangle \geq 0$

heißt Variationsungleichung. Dabei ist $\mathbb{K}$ eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge eines reflexiven Banach-Raums X und A ein (im allgemeinen nichtlinearer) Operator, $A : X \to X'$.

Besitzt der Operator A ein konvexes Potential, d.h. existiert ein differenzierbares, konvexes Funktional $J : X \to \mathbb{R}$ mit $J' = A$, dann ist die Variationsungleichung (1.1) äquivalent zur konvexen Minimumaufgabe

(1.2) finde $u^* \in \mathbb{K}$, so daß für alle $v \in \mathbb{K}$ gilt
$J(u^*) \leq J(v)$.

Variationsungleichungen können so als differentielle, notwendige Bedingungen für konvexe Minimumaufgaben interpretiert werden.

Ein einfaches Beispiel möge dies illustrieren [1]:

Gegeben sei eine strikt konvexe, stetig differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Minimumaufgabe für F ,

(1.3) finde $x \in \mathbb{R}$, so daß für alle $y \in \mathbb{R}$
$F(x) \leq F(y)$ gilt,

ist äquivalent zur folgenden Gleichung für $f := F'$:

Finde $x \in \mathbb{R}$, so daß $f(x) = 0$ gilt.

Die zusätzliche Nebenbedingung $a \leq x \leq b$ kann in der Formulierung (1.3) mühelos berücksichtigt werden:

---

[1] Nach [92; S.101].

Finde $x^* \in [a,b]$, so daß für alle $y \in [a,b]$
$F(x^*) \leq F(y)$ gilt.

Drei Fälle für die Lage von x^* sind möglich:

$x^* \in (a,b) \Rightarrow f(x^*) = 0$,

$x^* = a \quad \Rightarrow f(x^*) \geq 0$,

$x^* = b \quad \Rightarrow f(x^*) \leq 0$.

Daraus ergibt sich die geschlossene Formulierung:

Finde $x^* \in [a,b]$, so daß für alle $y \in [a,b]$
$f(x^*)(y-x^*) \geq 0$ gilt.

Unter den Problemen, die als Variationsungleichungen formuliert werden, sind es die Hindernisprobleme, für die bisher die meisten theoretischen und numerischen Ergebnisse erzielt wurden. Hindernisprobleme haben deshalb Modellcharakter.

Wir untersuchen hier Hindernisprobleme mit nichtlinearen elliptischen partiellen Differentialoperatoren in Divergenzform und in zwei Raumdimensionen [1].

Ausführlich studieren wir die Monotonie- und Stetigkeitseigenschaften einer Klasse nichtlinearer Differentialoperatoren. Insbesondere geben wir explizite und leicht nachweisbare, hinreichende Bedingungen für die starke Monotonie und für die Lipschitz-Stetigkeit auf beschränkten Mengen an. Dazu verwenden wir eine grundlegende Technik der nichtlinearen Funktionalanalysis: Die jeweiligen Eigenschaften der nichtlinearen Operatoren werden auf die entsprechenden Eigenschaften geeigneter Linearisierungen zurückgeführt. Als Ableitungsbegriff genügt in dieser Arbeit der Begriff der schwachen Gâteaux-Ableitung. Für schwach Gâteaux-differenzierbare Operatoren auf normierten Räumen leiten wir Taylorformeln her. Für die Anwendung auf die hier vorliegenden, konkreten Differentialoperatoren ist dabei von besonderer

---

[1] Hindernisprobleme mit parabolischen oder hyperbolischen Differentialoperatoren werden etwa in [48; Chap. 6, S.405ff und App. 6, S.733ff], [38], [57; Chap. VIII, S.278ff] beschrieben.

Bedeutung, daß keine Stetigkeit der höchsten Ableitungen vorausgesetzt wird.

Zur numerischen Lösung der Hindernisprobleme verwenden wir das Ritz-Galerkin-Verfahren in Verbindung mit der Methode der Finiten Elemente. Für die Klasse stetiger, stückweise linearer Finiter Elemente zeigen wir Fehlerabschätzungen, die in Abhängigkeit von der Maschenweite h der zugrundeliegenden Triangulierung quasioptimal sind. Dabei nennen wir eine Abschätzung $e_h = O(h^p \varphi(h))$ mit $\varphi(h) \to \infty$, $h \to 0$, des Fehlers e_h quasioptimal, falls sie sich nicht zu $e_h = O(h^p)$ verbessern läßt.

Für die Energienormabschätzungen verwenden wir die von CIARLET & SCHULTZ & VARGA [28] für das Ritz-Galerkin-Verfahren bei Operatorgleichungen mit stark monotonen, Lipschitzstetigen Operatoren begründete Technik, um eine Arbeit von BREZZI & HAGER & RAVIART [20] auf den Fall nichtlinearer Operatoren zu verallgemeinern. Unser Resultat ist auf die gesamte, von uns betrachtete Klasse von Operatoren anwendbar und umfaßt sowohl Theorem 1 von MITTELMANN [68], als auch die Ergebnisse von JANOVSKY & WHITEMAN [52] und NOOR [78]. Sowohl inhomogene Dirichlet-Randbedingungen und beliebige Hindernisse $\chi \neq 0$, als auch allgemeine konvexe, nicht notwendig polygonale Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sind zugelassen.

Für die L_∞-Abschätzungen verallgemeinern wir zuerst einen von BAIOCCHI [4] verwendeten, mit dem diskreten Maximumprinzip in [25], [27] verwandten Begriff auf eine Klasse nichtlinearer Operatoren. An die Triangulierung von Ω müssen wir dabei, wie üblich, zusätzliche Bedingungen stellen.

Mit Hilfe dieser "starken diskreten Inversmonotonie" können wir dann, ähnlich wie BAIOCCHI [4] für lineare Operatoren, die diskrete Lösung u_h^* nach unten und nach oben durch die Lösung eines verwandten, nichtlinearen Randwertproblems (ohne Hindernisbedingung) abschätzen. Bekannte Fehlerabschätzungen für dieses Randwertproblem liefern dann die quasioptimale L_∞-Abschätzung .

Inhaltsübersicht

In §2 stellen wir anhand der Formulierung des Dirichlet-Problems als Variationsaufgabe die Aufgabenstellung der Hindernisprobleme vor. Physikalisch läßt sich ein Hindernisproblem dahingehend interpretieren, daß die Gestalt einer Membran gesucht wird, die am Rand eines ebenen Gebietes fest eingespannt ist und zugleich über einem Hindernis liegt. Die Lösung weist unter allen vergleichbaren Flächen die kleinste potentielle Energie auf.

Der klassischen Formulierung bei Randwertproblemen entspricht die Charakterisierung der Lösung eines Hindernisproblems als sogenanntes Komplementaritätssystem. Darin wird das Grundgebiet in zwei Teile zerlegt. Im einen ist die Differentialgleichung erfüllt, im anderen wird die Hindernisbedingung aktiv. Daraus sieht man, daß Hindernisprobleme in Form von Variationsungleichungen schwache Formulierungen freier Randwertprobleme sind.

Im Gegensatz zur Situation bei Randwertproblemen (ohne Hindernisbedingung) sind hier der Regularität der Lösung, selbst bei glatten Daten, natürliche Schranken gesetzt. Diese Besonderheit läßt sich durch einfache Beispiele belegen.

In 3.1 leiten wir Taylorformeln für schwach Gâteaux-differenzierbare Operatoren auf normierten Räumen her. Dabei kann auf die Stetigkeit der höchsten Ableitungen verzichtet werden. Anschließend zeigen wir die gebräuchlichen Charakterisierungen von Potentialoperatoren und von Konvexität bei Funktionalen auch für schwach Gâteaux-differenzierbare Abbildungen. Außerdem werden differentielle Charakterisierungen von monotonen bzw. Lipschitz-stetigen Operatoren angegeben.

In 3.2 werden die klassischen Differentialoperatoren

$$Au = -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) + b(x,u,\nabla u) - f(x)$$

als Abbildungen zwischen Sobolew-Räumen

$$A : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))' ,$$

$$\langle Au,v\rangle := \int_\Omega \{a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v + b(x,u,\nabla u)v - fv\}\,dx ,$$

aufgefaßt[1]. Unter geeigneten Stetigkeits- und Wachstumsbedingungen ist bekannt, daß diese Operatoren wohldefiniert und stetig sind. Unter zusätzlichen Voraussetzungen zeigen wir hier darüberhinaus die schwache Gâteaux-Differenzierbarkeit und mittels der Charakterisierung aus 3.1 die Lipschitz-Stetigkeit von A.

In 3.3 geben wir explizite und leicht nachprüfbare hinreichende Bedingungen für die starke Monotonie von A auf $H_0^1(\Omega)$ an. Mit Hilfe einer modifizierten Friedrichsschen Ungleichung gewinnen wir sogar eine Monotonieaussage für Funktionen, die nicht notwendig am Rand übereinstimmen. Diese Bedingung kann vorteilhaft zur Gewinnung von Fehlerabschätzungen bei Hindernisproblemen mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen verwendet werden.

In §4 wird das Ritz-Galerkin-Verfahren zur Diskretisierung von Hindernisproblemen oder allgemeiner von Variationsungleichungen dargestellt. Die diskreten Ansatzräume konstruieren wir dabei mit der Methode der Finiten Elemente, und zwar verwenden wir stetige, stückweise lineare Ansatzfunktionen. Für die Lösungen von Hindernisproblemen erhält man damit quasioptimale Fehlerordnungen in der Energie- und in der L_∞-Norm. Im Hinblick auf die beschränkte Regularität der Lösung können diese Ordnungen selbst bei Verwendung von quadratischen oder noch höheren Ansatzräumen i.a. nicht verbessert werden.

In §5 zeigen wir für Hindernisprobleme mit stark monotonen, für beschränkte Argumente Lipschitz-stetigen Operatoren die quasioptimalen O(h)-Abschätzungen in der Energienorm.

---

[1] Vgl. etwa [23].

In 6.1 weisen wir unter zusätzlichen Voraussetzungen an die Operatoren und an die den Ansatzräumen zugrundegelegten Triangulierungen die starke diskrete Inversmonotonie nach. Dazu führen wir mit Hilfe einer Taylorformel die jeweiligen Aussagen auf entsprechende für lineare Operatoren zurück. Die diskrete Inversmonotonie muß dann allerdings gleichmäßig für eine ganze Klasse linearer Operatoren nachgewiesen werden, was die sorgfältige Beobachtung der auftretenden Konstanten erfordert.

In 6.2 verwenden wir die starke diskrete Inversmonotonie, um den Verfahrensfehler bis auf quasioptimale Zusatzterme durch den Fehler bei der Diskretisierung eines verwandten, nichtlinearen Randwertproblems abzuschätzen.

In 7.1 beschäftigen wir uns mit der konkreten Lösung der durch die Diskretisierung entstandenen, nichtlinearen Variationsungleichungen im $\mathbb{R}^n$. Für die Verallgemeinerung des Newton-Verfahrens auf Variationsungleichungen können die in jedem Newton-Schritt auftretenden linearen Variationsungleichungen mit dem projizierten SOR-Verfahren gelöst werden. In allgemeineren Situationen zeigen wir hier die Konvergenz des projizierten Gauß-Jacobi bzw. Gauß-Seidel-Verfahrens.

In 7.2 konstruieren wir drei typische Hindernisprobleme mit nichtlinearen Differentialoperatoren und geben explizit rotationssymmetrische Lösungen an.

In 7.3 demonstrieren wir für diese drei Beispiele die theoretischen Konvergenzaussagen dieser Arbeit anhand numerischer Resultate.

Herrn Prof. Dr. G. Hämmerlin danke ich herzlich für die wohlwollende Unterstützung und das stete Interesse am Fortgang der Arbeit. Besonderer Dank gebührt auch meinen Freunden Dr. G. Akrivis, H. Beck und Dr. E. Schäfer für die vielen anregenden Diskussionen, Fr. J. Gumberger-Happach für die Anfertigung der Computergraphiken.

§2. HINDERNISPROBLEME

2.1 Konventionen

In diesem Abschnitt führen wir Bezeichnungen für die verwendeten L_p-, Sobolew- und Hölder-Räume ein [1)].

Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand $\partial\Omega$. $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, bezeichne den Raum der (Äquivalenzklassen von) meßbaren Funktionen auf Ω, deren p-te Potenzen integrierbar sind. $L_\infty(\Omega)$ sei der Raum der meßbaren, wesentlich beschränkten Funktionen über Ω. Für $u \in L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, sei

$$\|u\|_{0,p} := \|u\|_{0,p,\Omega} := \left(\int_\Omega \{|u(x)|^p\} dx\right)^{1/p},$$

für $u \in L_\infty(\Omega)$

$$\|u\|_{0,\infty} := \|u\|_{0,\infty,\Omega} := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

$W_p^s(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $s \in \mathbb{N}_0$, bezeichne den Sobolew-Raum der Funktionen aus $L_p(\Omega)$, die verallgemeinerte Ableitungen bis zur Ordnung s in $L_p(\Omega)$ besitzen. Für $u \in W_p^s(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $s \in \mathbb{N}_0$, sei

$$|u|_{s,p} := |u|_{s,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha| = s} \|D^\alpha u\|_{0,p}^p\right)^{1/p},$$

$$\|u\|_{s,p} := \|u\|_{s,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha u\|_{0,p}^p\right)^{1/p}.$$

Abkürzend bezeichne $H^s(\Omega) := W_2^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{N}_0$, und

$$|u|_s := |u|_{s,\Omega} := |u|_{s,2,\Omega}, \quad \|u\|_s := \|u\|_{s,\Omega} := \|u\|_{s,2,\Omega}$$

für $u \in H^s(\Omega)$. $H_0^1(\Omega)$ sei der Abschluß von $C_0^\infty(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$.

---

1) Die Eigenschaften dieser Räume und ihre Beziehungen zueinander beschreibt ADAMS [1].

Es existiert ein Spuroperator

$$|_{\partial\Omega} : H^1(\Omega) \to L_2(\partial\Omega) , \quad u \to u|_{\partial\Omega} ,$$

der jeder Funktion $u \in H^1(\Omega)$ ihre verallgemeinerten Randwerte $u|_{\partial\Omega}$ zuordnet.

$C^{s,\lambda}(\bar{\Omega})$, $s \in \mathbb{N}_0$, $0 \le \lambda \le 1$, bezeichne den Hölder-Raum der s-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω, deren s-te Ableitungen auf Ω einer Hölder-Bedingung zum Exponenten λ genügen. Außerdem sei $W^s_\infty(\Omega) := C^{s-1,1}(\bar{\Omega})$, $s \in \mathbb{N}$, und

$$\|u\|_{s,\infty} := \|u\|_{s,\infty,\Omega} := \max_{|\alpha| \le s} \|D^\alpha u\|_{0,\infty} .$$

Wir unterdrücken später manchmal die Spezifikation des Grundgebietes Ω: $\|\cdot\|_{s,p}$ steht dann stets für $\|.\|_{s,p,\Omega}$.

$L_p^k(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, $k \in \mathbb{N}$, sei das k-fache kartesische Produkt von $L_p(\Omega)$,

$$L_p^k(\Omega) := \prod_{i=1}^{k} L_p(\Omega) , \quad \|\underline{u}\|_{L_\infty^k(\Omega)} := \max_{1 \le i \le k} \|u_i\|_{0,\infty,\Omega} ,$$

$$\|\underline{u}\|_{L_p^k(\Omega)} := \Big(\sum_{i=1}^{k} \|u_i\|_{0,p,\Omega}^p \Big)^{1/p} \quad \text{für } 1 \le p < \infty .$$

$L_p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, ist mit der Ordnung

$$u \le v \text{ in } L_p(\Omega) \quad :\Leftrightarrow \quad u(x) \le v(x) \text{ f.ü. auf } \Omega$$

ein Vektorverband[1]. Ganz analog $L_2(\partial\Omega)$.

---

1) Siehe [89; S.203ff].

2.2 Problemstellung

Wir betrachten zunächst die schwache Formulierung des Dirichletschen Randwertproblems

(2.2.1) $-\Delta u^* = 0$ auf Ω, $u^* = g$ auf $\partial\Omega$.

Dabei sei Ω ein ebenes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand $\partial\Omega$ und

(2.2.2) $J : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $J(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega \{|\nabla u|^2\} dx$.

Für $g \in H^1(\Omega)$ sei

$$H^1_g(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}\} = \{u + g \mid u \in H^1_0(\Omega)\}$$

der affine Teilraum von $H^1(\Omega)$, der aus den Funktionen besteht, die auf dem Rand $\partial\Omega$ mit g übereinstimmen.

Eine schwache Formulierung des Dirichletschen Randwertproblems (2.2.1) ist gegeben durch die Variationsaufgabe

(2.2.3) $u^* \in H^1_g(\Omega)$ $\forall v \in H^1_g(\Omega)$: $J(u^*) \leq J(v)$.

Das ist gerade die Aussage des Dirichletschen Prinzips.

Als notwendige Bedingungen erster Ordnung für ein Minimum von J ergeben sich mit

(2.2.4) $A : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))'$, $\langle Au, v\rangle := \int_\Omega \{\nabla u \cdot \nabla v\} dx$

die Euler-Gleichungen

(2.2.5) $u^* \in H^1_g(\Omega)$ $\forall v \in H^1_g(\Omega)$: $\langle Au^*, v - u^*\rangle = 0$.

Ist eine Lösung u^* der Eulergleichungen genügend glatt, dann löst sie auch das klassische Dirichlet-Problem (2.2.1).

In der Formulierung als Variationsaufgabe lassen sich zusätzliche Nebenbedingungen, sogenannte Hindernisbedingungen einfach berücksichtigen: Sei

$$(2.2.6)\quad \mathbb{K} := \{v \in H_g^1(\Omega) \mid v \geq \chi \text{ f.ü. auf } \Omega\}$$

die neue Konkurrenzklasse. Dabei ist $\chi \in H^1(\Omega)$ mit $\chi|_{\partial\Omega} \leq g|_{\partial\Omega}$ das sogenannte Hindernis. $\mathbb{K}$ ist dann eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge von $H^1(\Omega)$. Das Variationsproblem

$$(2.2.7)\quad u^* \in \mathbb{K} \quad \forall\, v \in \mathbb{K}: J(u^*) \leq J(v)$$

nennt man "Hindernisproblem". Es läßt sich physikalisch folgendermaßen interpretieren: Gesucht ist die Gestalt $u^* : \Omega \to \mathbb{R}$ einer Membran, die am Rand $\partial\Omega$ fest eingespannt ist und überall in Ω über einem Hindernis, dessen Lage durch χ gegeben ist, liegt. Sie weist unter allen vergleichbaren Flächen $v \in \mathbb{K}$ die kleinste "potentielle Energie" $J(u^*)$ auf.

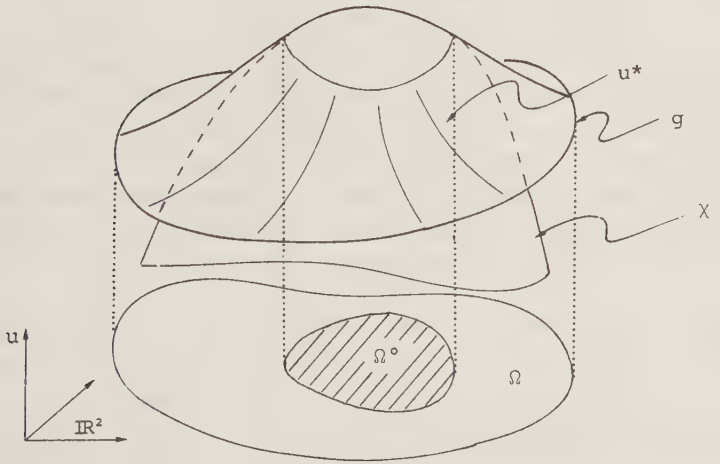

Fig. 1: Membran über einem Hindernis.

Die notwendige Bedingung erster Ordnung ist jetzt keine Familie von Gleichungen, sondern eine Familie von Ungleichungen, eine sogenannte Variationsungleichung

(2.2.8) $u^* \in \mathbb{K} \quad \forall\, v \in \mathbb{K}: \langle Au^*, v-u^* \rangle \geq 0$.

Ist erst einmal der Operator A als Ableitung der Energie J erkannt, dann bedeutet (2.2.8), daß J in jeder zulässigen Richtung, d.i. in jeder Richtung, die auf erlaubte Vergleichsfunktionen weist, wächst.

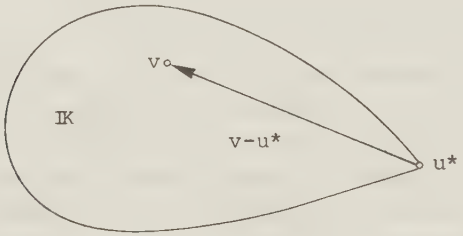

Fig. 2: Zulässige Richtungen v-u* .

Wir gründen die Untersuchung von Hindernisproblemen nicht auf ihre Formulierung als Minimumproblem (2.2.7), sondern auf jene als Variationsungleichung (2.2.8). Dadurch können wir auch die Fälle mitbehandeln, in denen der Operator A kein sogenannter Potentialoperator ist. Wir untersuchen deshalb in dieser Arbeit für Operatoren $A : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))'$ und Funktionen g, $\chi \in H^1(\Omega)$ die Aufgabe

(2.2.9)
$$u^* \in \mathbb{K} \quad \forall\, v \in \mathbb{K}: \langle Au^*, v-u^* \rangle \geq 0 \ ,$$
$$\mathbb{K} := \{ v \in H^1_g(\Omega) \mid v \geq \chi \text{ f.ü. auf } \Omega \} \ ,$$

die wir Hindernisproblem nennen.

Für genügend glatte Lösungen des Hindernisproblems gilt eine, der klassischen Formulierung (2.2.1) bei Randwertproblemen entsprechende, Charakterisierung in Form eines sogenannten Komplementaritätssystems.

Lemma 2.2.1

Sei $A : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))'$, $g \in H^1(\Omega)$, $\chi \in C(\overline{\Omega})$, $u^* \in C(\Omega) \cap H^1(\Omega)$, $u^*|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$ und $Au^* \, L_2(\Omega)$.

Dann ist u^* genau dann Lösung der Variationsungleichung

$$\forall v \in \mathbb{K}: \langle Au^*, v-u^* \rangle \geq 0 \ ,$$
$$\mathbb{K} := \{v \in H_g^1(\Omega) \mid v \geq \chi \text{ f.ü. auf } \Omega\} \ ,$$

wenn u^* Lösung des Komplementaritätssystems

$$(2.2.10) \quad Au^* \geq 0 \ , \ u^* \geq \chi \ , \ Au^*(u^*-\chi) = 0 \quad \text{f.ü. auf } \Omega$$

ist.

Beweis:

Sei zuerst u^* Lösung der Variationsungleichung.
Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ auf Ω , setzen wir $v := u^* + \varphi$.
Dann ist

$$\int_\Omega \{Au^* \varphi\} dx = \langle Au^*, \varphi \rangle = \langle Au^*, v-u^* \rangle \geq 0$$

und damit $Au^* \geq 0$ f.ü. auf Ω.
Setze jetzt $\Omega^+ := \{x \in \Omega \mid u^*(x) > \chi(x)\}$, $\Omega^\circ := \{x \in \Omega \mid u^*(x) = \chi(x)\}$.
Dann ist Ω^+ eine offene Teilmenge von Ω und $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^\circ$,
$\Omega^+ \cap \Omega^\circ = \emptyset$.
Sei $x^\circ \in \Omega^+ \Rightarrow \exists \rho > 0 : K_\rho(x^\circ) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x-x^\circ| < \rho\} \subset \Omega^+ \wedge$
$\exists \delta > 0 \ \forall x \in K_\rho(x^\circ) : u^*(x) - \chi(x) \geq \delta$.
Es gilt $\forall \varphi \in C_0^\infty(K_\rho(x^\circ)) \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in K_\rho(x^\circ) : |\varepsilon\varphi(x)| \leq \delta$
und damit $(u^* + \varepsilon\varphi)(x) - \chi(x) \geq u^*(x) - \chi(x) - |\varepsilon\varphi(x)| \geq \delta - \delta = 0$
$\Rightarrow u^* + \varepsilon\varphi \in \mathbb{K} \Rightarrow \langle Au^*, \varphi \rangle = \frac{1}{\varepsilon} \langle Au^*, u^* + \varphi - u^* \rangle \geq 0$.
Es gilt auch $\langle Au^*, -\varphi \rangle \geq 0$, also

$\forall \varphi \in C_o^\infty(K_\rho(x^\circ)) : \langle Au^*, \varphi \rangle = 0$
$\Rightarrow Au^* = 0$ f.ü. auf $K_\rho(x^\circ) \Rightarrow Au^* = 0$ f.ü. auf Ω^+
$\Rightarrow Au^*(u^*-\chi) = 0$ f.ü. auf $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^\circ$.

Sei jetzt umgekehrt u^* Lösung des Komplementaritätssystems. Für $v \in \mathbb{K}$ ist

$$\langle Au^*, v-u^* \rangle = \langle Au^*, \chi-u^* \rangle + \langle Au^*, v-\chi \rangle$$
$$= \int_\Omega \{Au^*(\chi-u^*)\}dx + \int_\Omega \{Au^*(v-\chi)\}dx .$$

Das erste Integral verschwindet wegen $Au^*(\chi-u^*) = 0$ f.ü. auf Ω, das zweite ist wegen $Au^* \geq 0$, $v-\chi \geq 0$ f.ü. auf Ω nichtnegativ. Also ist $\langle Au^*, v-u^* \rangle \geq 0$.

##

Wir nennen

(2.2.11) $\Omega^+ := \{x \in \Omega \mid u^*(x) > \chi(x)\}$

die "Menge der freien Punkte" und

(2.2.12) $\Omega^\circ := \{x \in \Omega \mid u^*(x) = \chi(x)\} = \Omega \setminus \Omega^+$

die "Kontaktmenge".

Aus (2.2.9) ergibt sich

$Au^* = 0$ f.ü. auf Ω^+ , $u^* = \chi$ auf Ω° und $\Omega^\circ \cup \Omega^+ = \Omega$.

Daraus erkennen wir, daß ein Hindernisproblem in Gestalt von (2.2.9) eine schwache Formulierung des folgenden freien Randwertproblems ist: Gesucht ist eine Funktion u^* auf Ω und eine Teilmenge Ω° von Ω , so daß

$u^* \geq \chi$, $Au^* \geq 0$ f.ü. auf Ω ,

$Au^* = 0$ f.ü. auf $\Omega^+ := \Omega \setminus \Omega^\circ$, $u^* = \chi$ f.ü. auf Ω° ,

$u^*|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$, $Au^* \in L_2(\Omega)$.

Die letzte Regularitätsbedingung, $Au^* \in L_2(\Omega)$, ist die Randbedingung auf dem freien Rand $\Gamma := \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^\circ$. Falls nämlich

Γ genügend glatt ist, und für den Operator A Regularitätssätze gelten, dann folgt aus $Au^* \in L_2(\Omega)$ $u^* \in H^2(\Omega)$ und daraus

$$u^*|_\Gamma = \chi|_\Gamma \quad \text{und} \quad \frac{\partial u^*}{\partial n}|_\Gamma = \frac{\partial \chi}{\partial n}|_\Gamma \quad .$$

Es liegen also, wie für freie Randwertprobleme typisch, zusätzliche, überbestimmte Randbedingungen auf der Kurve Γ in Ω vor, die gerade die Bedingungen zur Determinierung von Γ liefern.

Im Gegensatz zur Situation bei Randwertproblemen sind bei Hindernisproblemen der Regularität der Lösungen, selbst bei glatten Daten, natürliche Schranken gesetzt. Diese Besonderheit läßt sich durch einfache Beispiele belegen:

Beispiel 2.2.2

Mit $\Omega := (-2,2)$, $Au := -u''$, $\chi(x) := ax^2 + 1$, wobei $a \leq -1$,
$\mathbb{K} := \{v \in H_0^1(-2,2) \mid v \geq \chi \text{ auf } (-2,2)\}$
betrachten wir das (eindimensionale) Hindernisproblem

$u^* \in \mathbb{K} \; \forall \, v \in \mathbb{K} : \langle Au^*, v-u^* \rangle \geq 0$ (siehe Fig.3).

Ist $u^* \in H^2(\Omega)$, dann auch $u^* \in C(\Omega)$, $Au^* \in L_2(\Omega)$, so daß gilt: $u^* \geq \chi$, $Au^* \geq 0$, $Au^*(u^*-\chi) = 0$ f.ü. auf Ω .
Damit ist $-u^{*\prime\prime} = Au^* = 0$ auf Ω^+ und wegen $u^* = \chi$ auf Ω° ist $-u^{*\prime\prime} = -\chi'' = -2a > 0$ auf Ω° .

Also besitzt die zweite Ableitung von u^* notwendig Sprungstellen. Eine höhere Regularität als $u^* \in W_\infty^2(\Omega)$ dürfen wir also selbst für analytische Daten nicht erwarten.

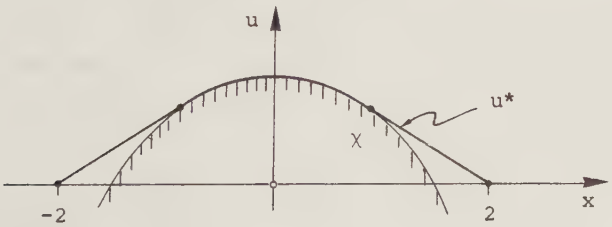

Fig. 3: Lösung von Beispiel 2.2.2 .

Die Beispiele in Abschnitt 7.2 sind weitere Belege dieser Regularitätsschranke.

An positiven Ergebnissen stammen Regularitätsaussagen für Hindernisprobleme mit linearen Operatoren von LEWY, STAMPACCHIA [61], BREZIS [13; Th.I.1, S.7], mit nichtlinearen Operatoren von BREZIS, STAMPACCHIA [17; Th.II.1, S.161], GERHARDT [44; S.390], MAZZONE [67; Th.1.1, S.115 und Th.1.2, S.116], BREZIS, KINDERLEHRER [16; Th.1, S.832 und Cor.1.3, S.839]. Eine Zusammenfassung geben KINDERLEHRER, STAMPACCHIA [57; Chap.IV, S.105-148]:

Unter geeigneten Voraussetzungen an den Operator A, das Hindernis χ und die Randwerte g gilt für die Lösung u^* des Hindernisproblems

$$u^* \in W_p^2(\Omega) \cap C^{1,\lambda}(\overline{\Omega}) \quad \text{für alle } 1 \leq p < \infty \text{ und } 0 \leq \lambda < 1 \ ,$$

unter verschärften Voraussetzungen an Ω und χ sogar

$$u^* \in W_\infty^2(\Omega) \ .$$

Diese Grenze für die Regularität der Lösung u^* ist der Grund, warum wir in dieser Arbeit nur finite Elemente vom linearen Typ betrachten. Selbst bei Verwendung von quadratischen oder noch höheren Elementen lassen sich die Ordnungen unserer Konvergenzaussagen nicht verbessern. Der erheblich größere Rechenaufwand dieser Verfahren läßt sich also nicht rechtfertigen.

§3. MONOTONE DIFFERENTIALOPERATOREN

3.1 Differenzierbare Operatoren

Eine grundlegende Technik der nichtlinearen Funktionalanalysis besteht darin, Eigenschaften nichtlinearer Operatoren auf entsprechende geeigneter Linearisierungen zurückzuführen[1].

Zur Untersuchung nichtlinearer, partieller Differentialoperatoren machen wir hier von dieser Methode Gebrauch. Dabei kommen wir mit einem schwachen Ableitungsbegriff, dem der sogenannten "schwachen Gâteaux-Ableitung" aus [2]. Für schwach Gâteaux-differenzierbare Operatoren auf normierten Räumen lassen sich Taylorformeln beweisen. Im Hinblick auf die spätere Anwendung dieser Resultate ist von Bedeutung, daß dazu keine Stetigkeitsbedingungen an die Ableitungen gestellt werden.

Schwach Gâteaux-differenzierbare Operatoren mit stetigen Ableitungen sind bereits Fréchet-differenzierbar. Dieses Ergebnis klärt das Verhältnis des hier verwendeten zu den sonst üblichen Ableitungsbegriffen.

Die bekannten Charakterisierungen von Potentialoperatoren und der Konvexitätseigenschaften von Funktionalen gelten auch für schwach Gâteaux-differenzierbare Abbildungen. Zudem gelten differentielle Charakterisierungen monotoner bzw. Lipschitz-stetiger Operatoren.

Das Dirichletsche Prinzip für nichtlineare Operatoren unter konvexen Restriktionen und die eindeutige Lösbarkeit von Variationsungleichungen sind unter unseren Voraussetzungen bekannt.

---

1) Siehe etwa BERGER [9].

2) Eine Sammlung verschiedener Ableitungsbegriffe gibt z.B. NASHED [74].

Definition 3.1.1

Seien X, Y normierte Räume, $F : X \to Y$.
F heißt schwach Gâteaux-differenzierbar, oder kurz differenzierbar, wenn gilt:

$$\forall u \in X \ \exists \Phi_u \in L(X,Y) \ \forall y' \in Y' \ \forall h \in X :$$

$$\langle \Phi_u h, y' \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \langle F(u+th) - F(u), y' \rangle \ .$$

Wir schreiben $F'(u) := \Phi_u$.

#

Wir verwenden vor allem zwei spezielle Fälle.

1) Für $Y = \mathbb{R}$ und ein Funktional $F : X \to \mathbb{R}$ ist die schwache Gâteaux-Ableitung von F charakterisiert durch:

$$F'(u)h = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (F(u+th) - F(u)) \ .$$

Der Begriff der schwachen Gâteaux-Ableitung fällt hier mit dem der starken Gâteaux-Ableitung zusammen.

2) Sei X ein reflexiver Banachraum und $Y = X'$. Hier ist $F : X \to X'$ und wegen $Y' = X'' \cong X$ ist

$$\forall u,h,w \in X : \langle F'(u)h, w \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \langle F(u+th) - F(u), w \rangle \ .$$

Wir zeigen jetzt eine Taylorformel für schwach Gâteaux-differenzierbare Operatoren auf normierten Räumen. Ähnliche Aussagen finden sich unter erheblich stärkeren Voraussetzungen etwa in [35; 8.14.3, S.186], unter etwas schwächeren in [95; Th. 4.7, S.41]. Doch wird in [95] im wesentlichen noch die Stetigkeit von $w \to F^{(k)}(w)$ auf der Strecke von u nach v vorausgesetzt, eine Bedingung, auf die wir im Hinblick auf spätere Anwendungen verzichten.

Definition 3.1.2

Seien X, Y normierte Räume, D eine konvexe Teilmenge von X, $F : X \to Y$.

(a) F heißt beschränkt auf D, wenn das Bild F(B) jeder beschränkten Teilmenge B von D eine beschränkte Menge in Y ist.

(b) F heißt global beschränkt, wenn F(X) eine beschränkte Teilmenge von Y ist.

#

Lemma 3.1.3

Seien X, Y normierte Räume, D eine konvexe Teilmenge von X, $F : X \to Y$ k-mal differenzierbar, $k \in \mathbb{N}$, d.h. für alle $l \in \{0,\dots,k-1\}$ ist $F^{(l)} : X \to L_l(X,Y)$ differenzierbar. $F^{(k)} : X \to L_k(X,Y)$ sei beschränkt auf D.

Dann gilt:

$$\forall\, u,v \in D \;\; \forall\, y' \in Y' :$$

$$\langle F(v),y'\rangle = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!} \langle F^{(l)}(u)(v-u)^l, y'\rangle + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \langle F^{(k)}(u+t(v-u))(v-u)^k, y'\rangle \, dt \,. \tag{3.1.1}$$

Beweis:

Seien $u,v \in D$, $y' \in Y'$. Definiere $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $f(t) := \langle F(u+t(v-u)),y'\rangle$. Nach Voraussetzung ist f k-mal differenzierbar auf [0,1],

$$f^{(l)}(t) = \langle F^{(l)}(u+t(v-u))(v-u)^l, y'\rangle \,, \quad t \in [0,1], \; 0 \le l \le k,$$

und $f^{(k)}$ ist beschränkt auf [0,1].
Dann ist $f^{(l)}$ stetig auf [0,1] für $0 \le l \le k-1$ und damit $f^{(k)}$ meßbar auf [0,1]. Außerdem ist

$$f^{(l)}(0) = \langle F^{(l)}(u)(v-u)^l, y'\rangle \,, \quad 0 \le l \le k,$$

und

$$f(1) = \langle F(v),y'\rangle \,.$$

Aus der Taylorformel

$$f(1) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!} f^{(l)}(0) + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) \, dt \,, \tag{3.1.2}$$

für k-mal differenzierbare Funktionen f mit integrierbarer k-ter Ableitung folgt jetzt unmittelbar die Behauptung.

Die Taylorformel (3.1.2) sieht man z.B. folgendermaßen ein [1]: Für alle k-mal differenzierbaren Funktionen $f,g : [0,1] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{l=1}^{k} (-1)^l f^{(l-1)}\cdot g^{(k-l)}\Big) = (-1)^k f^{(k)}\cdot g - f\cdot g^{(k)} .$$

Speziell für

$$g(t) := \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

ist

$$g^{(l)}(t) = \frac{(-1)^l}{(k-1-l)!}\,(1-t)^{k-1-l} \quad , \quad 0 \le l \le k-1, \quad g^{(k)} = 0$$

und damit

$$g^{(l)}(1) = 0, \quad 0 \le l \le k-2, \quad g^{(k-1)}(1) = (-1)^{k-1} ,$$

$$g^{(l)}(0) = \frac{(-1)^l}{(k-1-l)!} \quad , \quad 0 \le l \le k-1 .$$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Funktionen mit integrierbarer Ableitung [2] folgt dann

$$(-1)^k \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}\, f^{(k)}(t)\, dt = \int_0^1 \{(-1)^k f^{(k)}\cdot g - f\cdot g^{(k)}\}dt$$

$$= \sum_{l=1}^{k} (-1)^l f^{(l-1)}(t)\cdot g^{(k-l)}(t)\,\Big|_{t=0}^{1}$$

$$= (-1)^k f(1) - \sum_{l=1}^{k} \frac{(-1)^k}{(l-1)!}\, f^{(l-1)}(0) \quad ,$$

also die behauptete Taylorformel (3.1.2).

##

Diese Taylorformel wird später vor allem für die Spezialfälle $Y = \mathbb{R}$ bzw. $Y = X'$ und $k=1$ benötigt. Deshalb formulieren wir diese noch eigens.

---

1) Vgl. [35; 8.14.2, S.186].

2) Siehe etwa [88; Th. 8.21, S.179f].

Korollar 3.1.4

Sei X ein normierter Raum, D eine konvexe Teilmenge von X.

(a) Sei $J : X \to \mathbb{R}$ ein differenzierbares Funktional und sei $J' : X \to X'$ beschränkt auf D.

Dann gilt:

(3.1.3) $\forall\, u,v \in D : J(v) - J(u) = \int_0^1 \langle J'(u+t(v-u)), v-u\rangle \, dt$.

(b) Sei $A : X \to X'$ differenzierbar und $A' : X \to L(X,X')$ beschränkt auf D.

Dann gilt:

(3.1.4) $\forall\, u,v \in D \;\forall\, w \in X : \langle Av-Au, w\rangle = \int_0^1 \langle A'(u+t(v-u))(v-u), w\rangle dt$.

##

Aus Lemma 3.1.3 ergibt sich auch eine hinreichende Bedingung dafür, daß die schwache Gâteaux-Ableitung zugleich starke Fréchet-Ableitung ist.

Definition 3.1.5

Seien X, Y normierte Räume, $u \in X$, $F : X \to Y$.
Dann heißt F stark Fréchet-differenzierbar in u, wenn es $\Phi \in L(X,Y)$ gibt mit:

$$\lim_{\substack{\|h\| \to 0 \\ h \in X}} \frac{1}{\|h\|} \|F(u+h) - F(u) - \Phi h\| = 0 .$$

Φ heißt dann Fréchet-Ableitung von F in u.

#

Lemma 3.1.6 [1)]

Seien X, Y normierte Räume, $F : X \to Y$ differenzierbar mit Ableitung $F' : X \to L(X,Y)$, die in $u \in X$ stetig ist (bezüglich der Operatornorm-Topologie auf $L(X,Y)$).

Dann ist F in u Fréchet-differenzierbar mit Fréchet-Ableitung $F'(u)$.

---

1) Es handelt sich hier um eine einfache Übertragung von [95; Th. 2.1, S.21f], [9; Th. (2.1.13), S.68f].

Beweis:

Wegen der Stetigkeit von F' in u gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall h \in X : \ \|h\| \leq \delta \Rightarrow \|F'(u+h) - F'(u)\| \leq \varepsilon ,$$

insbesondere auch

$$\forall h \in X : \ \|h\| \leq \delta \Rightarrow \|F'(u+h)\| \leq \varepsilon + \|F'(u)\| =: M .$$

Wir wenden jetzt Lemma 3.1.3 mit $D := \{v \in X \mid \|v-u\| \leq \delta\}$ und $k=1$ an und erhalten für $y' \in Y'$:

$$\langle F(u+h) - F(u) - F'(u)h, y' \rangle = \int_0^1 \langle [F'(u+th) - F'(u)]h, y' \rangle \, dt$$

$$\leq \sup_{t \in [0,1]} \|F'(u+th) - F'(u)\|_{L(X,Y)} \, \|h\| \, \|y'\| \leq \varepsilon \, \|h\| \, \|y'\| .$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es $y' \in Y'$ mit $\|y'\| = 1$ und $\langle F(u+h) - F(u) - F'(u)h, y' \rangle = \|F(u+h) - F(u) - F'(u)h\|$.
Also gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall h \in X : \ \|h\| \leq \delta \Rightarrow$$

$$\|F(u+h) - F(u) - F'(u)h\| \leq \varepsilon \, \|h\| ,$$

d.h. $F'(u)$ ist Fréchet-Ableitung von F in u .

##

Nicht jeder Operator $A : X \to X'$ ist Potentialoperator, d.h. es existiert nicht immer ein $J : X \to \mathbb{R}$ so, daß A Ableitung von J ist. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für stetig differenzierbare A ist die Symmetrie der Linearisierungen $A'(u)$.

Lemma 3.1.7 [1)]

Sei X ein normierter Raum, $A : X \to X'$ differenzierbar und $A' : X \to L(X,X')$ stetig.

Dann sind äquivalent:

(a) $\forall u,v,w \in X : \langle A'(u)v, w \rangle = \langle A'(u)w, v \rangle$

(b) Es existiert ein $J : X \to \mathbb{R}$ so, daß A Fréchet-Ableitung von J ist.

---

1) Beweis in [43; Lemma 4.2, S.92]. Für die Richtung "(a) $\Rightarrow$ (b)" genügt statt der Stetigkeit der Ableitung $A' : X \to L(X,X')$ bereits deren Beschränktheit.

Beispiel 3.1.8

Sei X ein normierter Raum, $A : X \to X'$ ein linearer, stetiger und symmetrischer Operator, $f \in X'$. Definiere jetzt ein Funktional $J : X \to \mathbb{R}$ durch

$$J(u) := \frac{1}{2} \langle Au,u \rangle + \langle f,u \rangle \ .$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle J'(u),v \rangle &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{2t} \left(\langle A(u+tv),u+tv \rangle - \langle Au,u \rangle \right) \\ &\quad + \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\langle f,u+tv \rangle - \langle f,u \rangle \right) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{2t} \left(t\langle Au,v \rangle + t\langle Av,u \rangle + t^2 \langle Av,v \rangle \right) + \langle f,v \rangle \\ &= \langle Au,v \rangle + \langle f,v \rangle \ . \end{aligned}$$

##

Wichtige Eigenschaften differenzierbarer Funktionale lassen sich an ihren Ableitungen studieren.

Definition 3.1.9

Sei X ein normierter Raum, D eine konvexe Teilmenge von X, $J : X \to \mathbb{R}$.

(a) J heißt konvex auf D $:\Leftrightarrow$

$$\forall\, u,v \in D \ \forall\, \lambda \in [0,1] : J(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda J(u) + (1-\lambda)J(v) \ .$$

(b) J heißt strikt konvex auf D $:\Leftrightarrow$

$$\forall\, u,v \in D \ \forall\, \lambda \in (0,1): \ u \neq v \Rightarrow J(\lambda u + (1-\lambda)v) < \lambda J(u) + (1-\lambda)J(v) \ .$$

(c) J heißt uniform konvex auf D $:\Leftrightarrow$

$$\exists\, m > 0 \ \forall\, u,v \in D \ \forall\, \lambda \in [0,1] : J(\lambda u + (1-\lambda)v) + m\lambda(1-\lambda)\, \|u-v\|^2 \leq \lambda J(u) + (1-\lambda)J(v) \ .$$

#

Definition 3.1.10

Sei X ein normierter Raum, D eine konvexe Teilmenge von X, $A : X \to X'$.

(a) A heißt monoton auf D :$\Leftrightarrow$

$\forall u,v \in D : \langle Au-Av, u-v \rangle \geq 0$.

(b) A heißt strikt monoton auf D :$\Leftrightarrow$

$\forall u,v \in D : u \neq v \Rightarrow \langle Au-Av, u-v \rangle > 0$.

(c) A heißt stark monoton auf D :$\Leftrightarrow$

$\exists m > 0 \ \forall u,v \in D : \langle Au-Av, u-v \rangle \geq m \|u-v\|^2$.

#

Zuerst geben wir eine differentielle Charakterisierung konvexer Funktionale aus [81; 3.4.4, S.84f], deren Beweis wir hier der Vollständigkeit halber anführen.

Lemma 3.1.11

Sei X ein normierter Raum, D eine konvexe Teilmenge von X, $J : X \to \mathbb{R}$ ein differenzierbares Funktional.

Dann ist:

(a) J konvex auf D $\Leftrightarrow$

$\forall u,v \in D : \langle J'(u), v-u \rangle \leq J(v) - J(u)$;

(b) J strikt konvex auf D $\Leftrightarrow$

$\forall u,v \in D : u \neq v \Rightarrow \langle J'(u), v-u \rangle < J(v) - J(u)$;

(c) J uniform konvex auf D $\Leftrightarrow$

$\exists m > 0 \ \forall u,v \in D : \langle J'(u), v-u \rangle + m \|v-u\|^2 \leq J(v) - J(u)$.

Beweis:

"$\Leftarrow$": Es gelte

$\exists m \geq 0 \ \forall u,v \in D : \langle J'(u), v-u \rangle + m \|v-u\|^2 \leq J(v) - J(u)$.

Seien $u,v \in D$, $\lambda \in [0,1]$. Dann ist $w := \lambda u + (1-\lambda)v \in D$ und es gilt

$$J(u) - J(w) \geq \langle J'(w), u-w \rangle + m \|u-w\|^2$$
$$= \langle J'(w), (1-\lambda)(u-v) \rangle + m(1-\lambda)^2 \|u-v\|^2$$

und

$$J(v) - J(w) \geq \langle J'(w), v-w \rangle + m \|v-w\|^2$$
$$= \langle J'(w), \lambda(v-u) \rangle + m\lambda^2 \|u-v\|^2 \quad .$$

Multiplikation mit λ bzw. $(1-\lambda)$ und Addition ergibt

$$\lambda J(u) + (1-\lambda)J(v) - J(w) \geq m\lambda(1-\lambda) \|u-v\|^2 \quad .$$

Daraus folgt die Behauptung für Konvexität und uniforme Konvexität. Für strikte Konvexität argumentiert man ganz analog.

"$\Rightarrow$": Es gelte

$$\exists\, m \geq 0 \quad \forall\, u,v \in D \quad \forall\, \lambda \in [0,1] :$$
$$J(\lambda u + (1-\lambda)v) + m\lambda(1-\lambda) \|u-v\|^2 \leq \lambda J(u) + (1-\lambda)J(v) \quad .$$

Seien $u,v \in D$, $\lambda \in (0,1)$. Dann ist

$$J(u + \lambda(v-u)) - J(u) = J(\lambda v + (1-\lambda)u) - J(u)$$
$$\leq \lambda(J(v) - J(u)) - m\lambda(1-\lambda) \|u-v\|^2$$

und damit

$$\langle J'(u), v-u \rangle \leq J(v) - J(u) - m \|u-v\|^2 \quad .$$

Daraus folgt die Behauptung für konvexe und uniform konvexe Funktionale.

Ist J strikt konvex, dann gilt mit $w := \frac{1}{2}(u+v)$:

$$\langle J'(u), v-u \rangle = 2\langle J'(u), w-u \rangle \leq 2(J(w) - J(u))$$
$$< 2\left(\tfrac{1}{2}J(u) + \tfrac{1}{2}J(v) - J(u)\right) = J(v) - J(u) \quad .$$

##

Die Konvexität von Funktionalen läßt sich jetzt durch Monotonieeigenschaften der Ableitung charakterisieren. Auf offenen, konvexen Mengen D findet man diese differentielle Charakterisierung konvexer und strikt konvexer Funktionale auch bei [95; Th. 5.1, S.51f]. Unser Beweis für uniform konvexe Funktionale vereinfacht den in [81; 3.4.5, S.86f].

Lemma 3.1.12

Sei X ein normierter Raum, D eine konvexe Teilmenge von X, $J : X \to \mathbb{R}$ ein differenzierbares Funktional und $J' : X \to X'$ beschränkt auf D.

Dann ist J genau dann (strikt bzw. uniform) konvex auf D, wenn J' (strikt bzw. stark) monoton auf D ist.

Beweis:

"$\Rightarrow$": J sei uniform konvex.

Dann ist nach Lemma 3.1.11(c)

$$\forall u,v \in D : \quad J(v) - J(u) \geq \langle J'(u), v-u \rangle + m \|v-u\|^2 ,$$
$$J(u) - J(v) \geq \langle J'(v), u-v \rangle + m \|u-v\|^2 .$$

Addition ergibt

$$\langle J'(u) - J'(v), u-v \rangle \geq 2m \|u-v\|^2 ,$$

also die starke Monotonie von J'.

Für konvexe und strikt konvexe Funktionale argumentiert man ganz analog.

"$\Leftarrow$": Sei jetzt J' stark monoton.

Dann ist für $u,v \in D$ nach (3.1.3)

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= \int_0^1 \langle J'(u + t(v-u)), v-u \rangle \, dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t} \langle J'(u + t(v-u)) - J'(u), u + t(v-u) - u \rangle \, dt \\ &\quad + \langle J'(u), v-u \rangle \\ &\geq \int_0^1 \frac{1}{t} m \|t(v-u)\|^2 \, dt + \langle J'(u), v-u \rangle \\ &= \frac{m}{2} \|v-u\|^2 + \langle J'(u), v-u \rangle . \end{aligned}$$

Also ist nach Lemma 3.1.11(c) J uniform konvex auf D.

Für konvexe J argumentiert man ganz genauso mit $m=0$, für strikt konvexe J analog mit striktem Ungleichungszeichen. Nach Lemma 3.1.11(a) und 3.1.11(b) folgt in diesen Fällen die Behauptung.

##

Auch die Stetigkeits- und Monotonieeigenschaften von Operatoren $A : X \to X'$ lassen sich an entsprechenden Eigenschaften der Ableitungen $A'(u)$ untersuchen.

Definition 3.1.13

Seien X, Y normierte Räume, $F : X \to Y$.

F heißt Lipschitz-stetig (auf X) $:\Leftrightarrow$

$$\exists M \geq 0 \quad \forall u,v \in X : \quad \|F(u) - F(v)\| \leq M \|u-v\| \ .$$

F heißt Lipschitz-stetig für beschränkte Argumente $:\Leftrightarrow$

$$\forall R \geq 0 \quad \exists M_R \geq 0 \quad \forall u,v \in X : \quad \|u\| \leq R \ \wedge \ \|v\| \leq R \Rightarrow \|F(u) - F(v)\| \leq M_R \|u-v\| \ .$$

#

Definition 3.1.14

Sei X ein normierter Raum, X_0 ein Teilraum von X, $B : X \to X'$ ein linearer Operator.

(a) B heißt positiv (nichtnegativ) auf X_0 $:\Leftrightarrow$

$$\forall v \in X_0 : \ \langle Bv,v \rangle > 0 \quad (\text{bzw. } \langle Bv,v \rangle \geq 0) \ .$$

(b) B heißt positiv definit auf X_0 $:\Leftrightarrow$

$$\exists m > 0 \quad \forall v \in X_0 : \ \langle Bv,v \rangle \geq m \|v\|^2 \ .$$

#

Lemma 3.1.15

Sei X ein normierter Raum, $A : X \to X'$ differenzierbar.

Dann gilt:

(a) A ist Lipschitz-stetig auf X $\Leftrightarrow$

$A' : X \to L(X,X')$ ist global beschränkt.

(b) A ist Lipschitz-stetig für beschränkte Argumente $\Leftrightarrow$

$A' : X \to L(X,X')$ ist beschränkt auf X.

Beweis:

"$\Rightarrow$": Sei A Lipschitz-stetig auf $\{u \in X \mid \|u\| < R\}$, $R > 0$.
Seien $u,v,w \in X$, $\|u\| < R$.
Für genügend kleine $t > 0$ ist $\|u+tv\| < R$ und damit

$$\langle A'(u)v,w\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\langle A(u+tv) - A(u),w\rangle \leq \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} M\|tv\| \|w\|$$
$$= M\|v\|\|w\| .$$

Also ist $A'(u)$ gleichmäßig beschränkt für $\|u\| < R$.

"$\Leftarrow$": Sei jetzt $A'(u)$ gleichmäßig beschränkt auf $\{u \in X \mid \|u\| < R\}$.
Seien $u,v,w \in X$, $\|u\| < R$, $\|v\| < R$. Dann ist nach (3.1.4)

$$\langle Au-Av,w\rangle = \int_0^1 \langle A'(v + t(u-v))(u-v),w\rangle dt$$
$$\leq \int_0^1 M\|u-v\| \|w\| dt = M\|u-v\| \|w\| .$$

Also ist A Lipschitz-stetig auf $\{u \in X \mid \|u\| < R\}$.

Damit ist (b) bewiesen; (a) folgt für $R = \infty$.

##

Lemma 3.1.16

Sei X ein normierter Raum, D eine affiner Teilraum von X. Bezeichne $X_o := D - D$ den zugehörigen linearen Teilraum. Sei $A : X \to X'$ differenzierbar und $A' : X \to L(X,X')$ beschränkt auf D.

Dann gilt:

(a) A ist monoton auf D $\Leftrightarrow$
$A'(u)$ ist für $u \in D$ nichtnegativ auf X_o .

(b) A ist stark monoton auf D $\Leftrightarrow$

$A'(u)$ ist positiv definit auf X_o, gleichmäßig für $u \in D$, d.h.

$$\exists\, m > 0 \quad \forall u \in D \quad \forall v \in X_o : \langle A'(u)v,v\rangle \geq m\|v\|^2 .$$

Beweis:

"$\Rightarrow$": Es gelte $\exists\, m \geq 0 \;\; \forall u,v \in D : \langle Au-Av, u-v\rangle \geq m \|u-v\|^2$.
Für $u,v \in D$ und für $t \in (0,1)$ ist $u + t(v-u) \in D$ und damit

$$\begin{aligned}\langle A'(u)(v-u), v-u\rangle &= \lim_{\substack{t\to 0\\ 0<t<1}} \frac{1}{t} \langle A(u+t(v-u)) - A(u), v-u\rangle \\ &= \lim_{\substack{t\to 0\\ 0<t<1}} \frac{1}{t^2} \langle A(u+t(v-u)) - A(u), u+t(v-u)-u\rangle \\ &\geq m \|v-u\|^2 .\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": Es gelte $\exists\, m \geq 0 \;\; \forall u \in D \;\; \forall w \in X_0 :$
$\langle A'(u)w, w\rangle \geq m \|w\|^2$.
Für $u,v \in D$ und für $t \in [0,1]$ ist $v-u \in X_0$ und
$u + t(v-u) \in D$. Wegen (3.1.4) gilt dann:

$$\langle Av-Au, v-u\rangle = \int_0^1 \langle A'(u+t(v-u))(v-u), v-u\rangle \, dt \geq m \|v-u\|^2 .$$

Für $m=0$ folgt daraus (a), für $m>0$ (b).

##

Bemerkung 3.1.17

(a) Aus Lemma 3.1.16 ergeben sich unmittelbar differentielle Charakterisierungen zweiter Ordnung für die (uniforme) Konvexität von Funktionalen. Z.B. gilt mit den dortigen Bezeichnungen:
J ist konvex auf $D \Leftrightarrow \forall u \in D : J''(u)$ ist nichtnegativ auf X_0.

(b) Für die strikte Monotonie lassen sich nach dem Muster von Lemma 3.1.16(a) lediglich hinreichende Bedingungen gewinnen, wie das folgende, einfache Beispiel zeigt:

Sei $D := X_0 := X := \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$.
Dann ist f strikt monoton wachsend und deswegen auch strikt monoton im Sinne der Definition 3.1.10(b). Andererseits ist $f'(0) = 0$, $f'(x)$ ist also nicht positiv für $x=0$.

#

Für monotone Potentialoperatoren A entspricht jeder Variationsungleichung für A eine Minimumaufgabe für das Potential J von A ("Dirichletsches Prinzip").

Lemma 3.1.18 [1)]

Sei X ein normierter Raum, $\mathbb{K}$ eine konvexe Teilmenge von X, $J : X \to \mathbb{R}$ ein konvexes, differenzierbares Funktional mit Ableitung $A := J'$, $A : X \to X'$.

Dann ist $u^* \in \mathbb{K}$ genau dann Lösung der Variationsungleichung

$$\forall\, v \in \mathbb{K} : \langle Au^*, v-u^* \rangle \geq 0 \ ,$$

wenn u^* Lösung der Minimumaufgabe

$$\forall\, v \in \mathbb{K} : \quad J(u^*) \leq J(v)$$

ist.

Beweis:

"$\Leftarrow$":

Seien $v \in \mathbb{K}$, $t \in (0,1)$. Dann ist $u^* + t(v-u^*) \in \mathbb{K}$, $J(u^*) \leq J(u^* + t(v-u^*))$ und deswegen

$$\langle Au^*, v-u^* \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(J(u^* + t(v-u^*)) - J(u^*) \right) \geq 0 \ .$$

"$\Rightarrow$":

Umgekehrt ist wegen der Konvexität von J

$$\forall\, v \in X : J(v) - J(u^*) \geq J'(u^*)(v-u^*) = \langle Au^*, v-u^* \rangle \ .$$

Für $v \in \mathbb{K}$ ist $\langle Au^*, v-u^* \rangle \geq 0$, also $J(v) \geq J(u^*)$.

##

Unter unseren Voraussetzungen sind Variationsungleichungen eindeutig lösbar.

Satz 3.1.19

Sei X ein reflexiver Banachraum, $\mathbb{K}$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge von X, $A : X \to X'$ Lipschitz-stetig für beschränkte Argumente und auf $\mathbb{K}$ stark monoton.

Dann gibt es genau eine Lösung der Variationsungleichung

$$u^* \in \mathbb{K} \quad \forall\, v \in \mathbb{K} : \langle Au^*, v-u^* \rangle \geq 0 \ .$$

---

1) Vgl. etwa [57; Prop. I.5.1 und Prop. I.5.2, S.15f].

Beweis:

Sei $v_o \in \mathbb{K}$. Wegen der starken Monotonie von A ist

$$\forall u \in \mathbb{K}: \langle Au-Av_o, u-v_o\rangle \geq m \|u-v_o\|^2 ,$$

also insbesondere

$$\frac{\langle Au-Av_o, u-v_o\rangle}{\|u-v_o\|} \to \infty \quad \text{für} \quad \|u\| \to \infty , \; u \in \mathbb{K} .$$

Außerdem ist A stetig auf X. Die Behauptung folgt dann aus bekannten Sätzen, siehe z.B. [57; Cor. 1.8, S.87].

##

3.2 Nichtlineare elliptische partielle Differentialoperatoren

In diesem Abschnitt untersuchen wir die (klassischen) Differentialoperatoren

$$Au = -\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u)) + b(x,u,\nabla u) - f$$

als Abbildungen zwischen Sobolew-Räumen

$$A : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))' ,$$

$$\langle Au, v\rangle := \int_\Omega \{a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v + b(x,u,\nabla u)\, v - f\, v\}\, dx .$$

Unter geeigneten Wachstums- und Stetigkeitsbedingungen ist bekannt, daß diese Operatoren wohldefiniert und stetig sind (siehe etwa [23]). Unter zusätzlichen Voraussetzungen zeigen wir hier darüberhinaus die schwache Gâteaux-Differenzierbarkeit und mittels einer Charakterisierung aus Abschnitt 3.1 die Lipschitz-Stetigkeit von A.

Zuerst formulieren wir drei Bedingungen an die Koeffizientenfunktionen a, b und f der Differentialoperatoren, die wir für den Rest dieser Arbeit voraussetzen. Dabei liefern die Bedingungen (A1) und (A2) die Wohldefiniertheit und Lipschitz-Stetigkeit für beschränkte Argumente; aus der Bedingung (A3) folgt die starke Monotonie.

Generelle Voraussetzungen an die Koeffizienten 3.2.1:

(A1) Die Funktionen

$$a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 , \quad (x,z,\zeta) \mapsto a(x,z,\zeta) ,$$

$$b : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} , \quad (x,z,\zeta) \mapsto b(x,z,\zeta) ,$$

seien stetig und nach z und ζ stetig differenzierbar. Außerdem sei $f \in L_2(\Omega)$.

Bezeichnungen:

$$\alpha := \frac{\partial}{\partial \zeta} a \ , \quad \alpha : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2,2} \ ,$$

$$\gamma_1 := \frac{\partial}{\partial z} a \ , \quad \gamma_2 := \frac{\partial}{\partial \zeta} b \ , \quad \gamma_1, \gamma_2 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ ,$$

$$\beta := \frac{\partial}{\partial z} b \ , \quad \beta : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ .$$

(A2) Es gelten die Wachstumsbedingungen:

$$\exists\, c \geq 0 \ \exists\, p \in [2,\infty) \ \forall\, x \in \Omega \ \forall\, z \in \mathbb{R} \ \forall\, \zeta \in \mathbb{R}^2 :$$

$$|a(x,0,0)| \leq c \ , \quad |b(x,0,0)| \leq c \ ,$$

$$|\alpha(x,z,\zeta)| \leq c \ ,$$

$$|\gamma_i(x,z,\zeta)| \leq c \left(1 + |z|^{(p-2)/2} + |\zeta|^{(p-2)/p}\right) , \ i = 1,2 \ ,$$

$$|\beta(x,z,\zeta)| \leq c \left(1 + |z|^{p-2} + |\zeta|^{2(p-2)/p}\right) .$$

(A3) Es gelten die folgenden Bedingungen:

i) $\exists\, m_o > 0 \ \forall\, x \in \Omega \ \forall\, z \in \mathbb{R} \ \forall\, \zeta \in \mathbb{R}^2 \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^2 :$

$$\xi^t \alpha(x,z,\zeta)\, \xi \geq m_o |\xi|^2$$

ii) $\exists\, \gamma_o \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, $\operatorname{div}(\gamma_o) \leq 0$ auf Ω $\exists\, \mu_1 \geq 0$

$$\forall\, x \in \Omega \ \forall\, z \in \mathbb{R} \ \forall\, \zeta \in \mathbb{R}^2 :$$

$$|\gamma_1(x,z,\zeta) + \gamma_2(x,z,\zeta) - \gamma_o(x)| \leq \mu_1$$

iii) $\exists\, \mu_2 \in \mathbb{R} \ \forall\, x \in \Omega \ \forall\, z \in \mathbb{R} \ \forall\, \zeta \in \mathbb{R}^2 :$

$$\beta(x,z,\zeta) \geq \mu_2$$

iv) Die Konstanten μ_1 und μ_2 erfüllen die folgenden Ungleichungen:

$$\mu_1 \geq 0 \ ,$$

$$\mu_2 > \begin{cases} -\dfrac{m_o}{c^2} + \dfrac{\mu_1}{c} & \text{für } 0 \leq \mu_1 \leq \dfrac{2m_o}{c} \\[2ex] \dfrac{\mu_1^2}{4m_o} & \text{für } \dfrac{2m_o}{c} \leq \mu_1 \ . \end{cases}$$

Dabei sei $c = c(\Omega)$ die Konstante der Friedrichsschen Ungleichung

$$\forall u \in H_o^1(\Omega) : \|u\|_o \leq c(\Omega)\, |u|_1 .$$

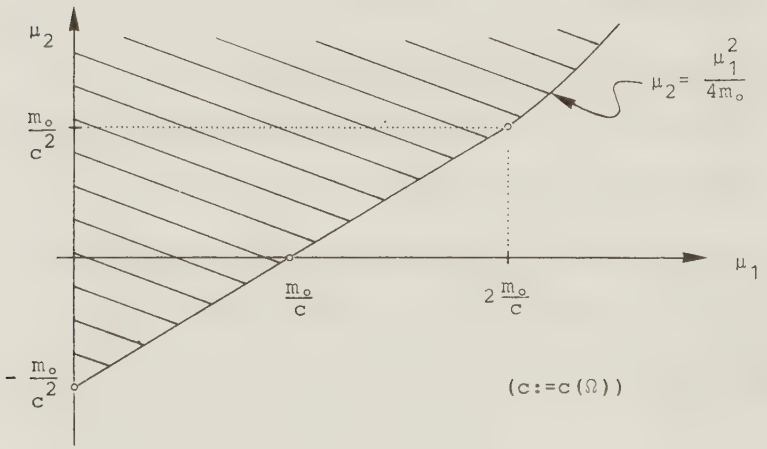

Fig. 4: Zulässiger Bereich für μ_1 und μ_2 .

Bemerkungen 3.2.2

(a) Statt der Stetigkeit genügen in (A1) Carathéodory-Bedingungen für a und b, d.h. es seien

$$a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 ,$$

$$b : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 ,$$

und es gelte: Für fast alle $x \in \Omega$ sind die Funktionen

$$(z,\zeta) \mapsto a(x,z,\zeta) , \quad (z,\zeta) \mapsto b(x,z,\zeta)$$

stetig differenzierbar und für alle $z \in \mathbb{R}$, $\zeta \in \mathbb{R}^2$ sind die Funktionen

$$x \mapsto a(x,z,\zeta) , \quad x \mapsto b(x,z,\zeta)$$

meßbar.

(b) Die Bedingung (A1) beinhaltet die Glattheitsvoraussetzungen an die Koeffizientenfunktionen.

In (A2) sind die Wachstumsbedingungen formuliert: α ist beschränkt, γ_1 und γ_2 sind bezüglich z von polynomialem und bezüglich ζ von sublinearem Wachstum. β ist bezüglich z von polynomialem und bezüglich ζ von schwächerem als quadratischem Wachstum.

In (A3) stecken die Bedingungen, die die Monotonieeigenschaften garantieren: Die Elliptizität des Hauptteils fordert (i), die unsymmetrischen Anteile werden in (ii) beschränkt. In (iii) wird β nach unten beschränkt und in (iv) werden γ_1 und γ_2 miteinander korreliert.

(c) Wie im Beweis des nächsten Satzes zum Ausdruck kommt, folgen aus (A2) durch Integration entsprechende Wachstumsbedingungen für a und b:

$$(3.2.1)\quad \exists\, c \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^2 :$$

$$|a(x,z,\zeta)| \leq c\,(1 + |z|^{p/2} + |\zeta|)\ ,$$

$$|b(x,z,\zeta)| \leq c\,(1 + |z|^{p-1} + |\zeta|^{2(p-1)/p})\ .$$

(d) Für

$$a(x,z,\zeta) := \zeta\ ,\quad b(x,z,\zeta) := -\lambda z\ ,$$

erhält man $\alpha = I$, $\beta = -\lambda$, also $m_o = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = -\lambda$, und klassisch

$$Au = -\Delta u - \lambda u\ .$$

Insbesondere wird für $\lambda := c(\Omega)^{-2}$ in (A3(iv)) das Gleichheitszeichen angenommen. Es ist dann $\mu_2 = -m_o\, c(\Omega)^{-2}$ und daher (A3(iv)) verletzt.

Dieses λ ist gerade der kleinste Eigenwert des Eigenwertproblems

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{auf } \Omega\ ,\quad u|_{\partial\Omega} = 0\ .$$

Das Randwertproblem

$$u^* \in H_o^1(\Omega) \quad \forall\, v \in H_o^1(\Omega) \ :\ \langle Au^*, v-u^* \rangle = 0$$

ist daher nicht eindeutig lösbar. A kann also nicht stark monoton auf $H_o^1(\Omega)$ sein.

Aus diesem Beispiel ist zu ersehen, daß die Bedingung (A3) scharf ist.

(e) In [23] z.B. werden allgemeinere Wachstumsbedingungen als in (A2) betrachtet. Da wir in dieser Arbeit aber ausschließlich stark monotone Operatoren zulassen wollen, sind nach einem Ergebnis in [63; Lemma 2.1.2, S.21] nur unsere Bedingungen (A2) sinnvoll.

Beispiele 3.2.3 [1)]

(a) Lineare, elliptische Differentialoperatoren:
Die Wahl

$$a(x,z,\zeta) := \zeta \ , \quad b(x,z,\zeta) := 0 \ ,$$

ergibt klassisch den Differentialoperator

$$Au = -\Delta u - f \ .$$

(b) Fastlineare Differentialoperatoren:
Hier sei speziell

$$a(x,z,\zeta) = \alpha(x)\zeta \quad \text{mit} \quad \alpha : \Omega \to \mathbb{R}^{2,2} \ ,$$

$$b(x,z,\zeta) = b(x,z) \ ,$$

und es gelte

$$\exists\, m_o > 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2 : \xi^t \alpha(x)\, \xi \geq m_o |\xi|^2 \ ,$$

$$\exists\, \mu_2 > -\frac{m_o}{c^2} \quad \forall x \in \Omega \quad \forall z \in \mathbb{R} : \beta(x,z) \geq \mu_2 \ .$$

Der Operator setzt sich hier aus einem linearen, elliptischen Hauptteil und einem bezüglich u nichtlinearen Nebenanteil zusammen. Dieser Wahl der Koeffizienten entspricht klassisch der Differentialoperator

$$Au = -\operatorname{div}(\alpha(x)\nabla u) + b(x,u) - f \ .$$

---

1) Siehe auch [58], [62], [83].

Setzen wir noch spezieller

$$\alpha(x) := I \ , \quad \mu_2 := 0 \ ,$$

dann erhalten wir mit einer bezüglich u monoton wachsenden Funktion b klassisch den häufig untersuchten Operator

$$Au = -\Delta u + b(x,u) - f \ .$$

(c) Quasilineare Differentialoperatoren:
Hier sei speziell

$$a(x,z,\zeta) = \alpha(x)\,\zeta \quad \text{mit} \quad \alpha : \Omega \to \mathbb{R}^{2,2} \ ,$$

$$b(x,z,\zeta) = \varphi(\zeta) \quad \text{mit} \quad \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ .$$

Dann ist $\beta = 0$ und $\gamma_2(x,z,\zeta) = \gamma_2(\zeta) = \nabla\varphi(\zeta)$.
Die Bedingung (A3(ii)) ist etwa erfüllt, falls

$$\exists\, \gamma_o \in \mathbb{R}^2 \quad \exists\, \mu_1 < \frac{m_o}{c} \quad \forall\, \zeta \in \mathbb{R}^2 : \ |\nabla\varphi(\zeta) - \gamma_o| \le \mu_1$$

gilt. Anschaulich heißt das, daß φ "nahezu linear" ist. Der Operator lautet hier klassisch

$$Au = -\operatorname{div}(\alpha(x)\nabla u) + \varphi(\nabla u) - f \ .$$

(d) Quasilineare Differentialoperatoren zu "homogenen, isotropen Materialgesetzen" der Physik:
Hier sei

$$a(x,z,\zeta) = \psi(|\zeta|^2)\,\zeta \quad \text{mit} \quad \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ,$$

$$b(x,z,\zeta) = \varphi(|\zeta|^2) \quad \text{mit} \quad \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ .$$

Dann ist

$$\alpha(x,z,\zeta) = \alpha(\zeta) = 2\psi'(|\zeta|^2)\,\zeta\,\zeta^t + \psi(|\zeta|^2)\,I \ ,$$

$$\gamma_1(x,z,\zeta) = 0 \ ,$$

$$\gamma_2(x,z,\zeta) = 2\,\zeta\varphi'(|\zeta|^2) \ ,$$

$$\beta(x,z,\zeta) = 0 \ .$$

Die Bedingung (A3) ist erfüllt, falls etwa gilt:

$$\exists\, \mu_1 < \frac{m_o}{c} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+ : \ |t\varphi'(t^2)| \le \frac{1}{2}\,\mu_1 \ .$$

Der Differentialoperator lautet hier klassisch

$$Au = -\operatorname{div}(\psi(|\nabla u|^2)\nabla u) + \varphi(|\nabla u|^2) - f \ .$$

Viele Gesetze der Physik bedienen sich Operatoren dieser Bauart. Die Isotropie des physikalischen Mediums kommt dabei in der Invarianz unter orthogonalen Transformationen, die Homogenität des Mediums in der Invarianz unter Translationen zum Ausdruck. In der Theorie der Strömungen von Fluida durch poröse Medien etwa repräsentiert ∇u die Geschwindigkeit, u das Geschwindigkeitspotential (englisch: "hydrostatic head") der Strömung. In die Gesetze dieses Vorgangs geht nur die Geschwindigkeit, nicht aber deren Potential ein (vgl. dazu z.B. [98], [2], [64], [42]).

Die von uns zugelassenen Operatoren sind differenzierbar und Lipschitz-stetig für beschränkte Argumente.

Satz 3.2.4

Es seien (A1) und (A2) erfüllt.

Dann gilt:

(a) Der Operator

$$A : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))' \ ,$$

(3.2.2)

$$\langle Au, v\rangle := \int_\Omega \{a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v + b(x,u,\nabla u)\, v - f v\}\, dx \ ,$$

ist wohldefiniert und differenzierbar mit Ableitung

$$A' : H^1(\Omega) \to L(H^1(\Omega), (H^1(\Omega))') \ ,$$

(3.2.3)

$$\langle A'(u)v, w\rangle = \int_\Omega \{\nabla w^t \alpha(x,u,\nabla u)\nabla v + \gamma_1(x,u,\nabla u)\cdot\nabla w\, v + \gamma_2(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v\, w + \beta(x,u,\nabla u)\, v w\}\, dx \ .$$

(b) $A' : H^1(\Omega) \to L(H^1(\Omega), (H^1(\Omega))')$
ist eine beschränkte Abbildung.

(c) A ist Lipschitz-stetig für beschränkte Argumente.

(d) Besitzt A einen linearen Hauptteil, d.h. es gelte

$$\forall x \in \Omega \ \forall z \in \mathbb{R} \ \forall \zeta \in \mathbb{R}^2 : a(x,z,\zeta) = \alpha(x)\zeta \ ,$$

dann ist $A' : H^1(\Omega) \to L(H^1(\Omega), (H^1(\Omega))')$ stetig.

Beweis:

(i) Aus (A2) folgen durch Integration die Wachstumsbedingungen (3.2.1) für a und b. Es ist nämlich für festes $x \in \Omega$ und $(z,\zeta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
|a(x,z,\zeta)| &\leq |a(x,z,\zeta) - a(x,0,0)| + |a(x,0,0)| \\
&= \Big| \int_0^1 \{\gamma_1(x,sz,s\zeta)\, z + \alpha(x,sz,s\zeta)\zeta\} ds \Big| + |a(x,0,0)| \\
&\leq c\,(|z| + |z|^{p/2} + |z||\zeta|^{(p-2)/p} + |\zeta|) + c \\
&\leq c\,(1 + |z|^{p/2} + |\zeta|)\,.
\end{aligned}
$$

Die letzte Ungleichung gilt wegen $|z||\zeta|^{(p-2)/p} \leq |z|^{p/2} + |\zeta|$ und $|z| \leq 1 + |z|^{p/2}$ für $p \geq 2$ (siehe [1; (4), S.23]).

Genauso ist

$$
\begin{aligned}
|b(x,z,\zeta)| &\leq |b(x,z,\zeta) - b(x,0,0)| + |b(x,0,0)| \\
&= \Big| \int_0^1 \{\gamma_2(x,sz,s\zeta)\cdot\zeta + \beta(x,sz,s\zeta)\, z\}\, ds \Big| + |b(x,0,0)| \\
&\leq c\,(|\zeta| + |z|^{(p-2)/2}|\zeta| + |\zeta|^{2(p-1)/p} + |z| + |z|^{p-1} \\
&\qquad + |z||\zeta|^{2(p-2)/p}) + c \\
&\leq c\,(1 + |z|^{p-1} + |\zeta|^{2(p-1)/p})\,.
\end{aligned}
$$

Die letzte Ungleichung gilt hier, da $|z|^{(p-2)/2}|\zeta| \leq |z|^{p-1} + |\zeta|^{2(p-1)/p}$, $|z||\zeta|^{2(p-2)/p} \leq |z|^{p-1} + |\zeta|^{2(p-1)/p}$ und für $p \geq 2$ auch $|\zeta| \leq 1 + |\zeta|^{2(p-1)/p}$ ist.

(ii) Wir zeigen jetzt, daß $A : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))'$ stetig und beschränkt ist.

Aufgrund der Wachstumsbeschränkungen (3.2.1) für a und b sind die sogenannten Nemyzki- oder Kompositions-Operatoren

$$L_p(\Omega) \times L_2^2(\Omega) \to L_2^2(\Omega)\,, \quad (z,\zeta) \mapsto a(\cdot,z(\cdot),\zeta(\cdot))\,,$$

$$L_p(\Omega) \times L_2^2(\Omega) \to L_{p/(p-1)}(\Omega)\,, \quad (z,\zeta) \mapsto b(\cdot,z(\cdot),\zeta(\cdot))\,,$$

wohldefiniert, stetig und beschränkt (siehe [94; §19, S.154ff] oder [23; Lemma 3.2]).

Die Operatoren $A_1, A_2 : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))'$,

$$\langle A_1 u, v\rangle := \int_\Omega \{a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v\}dx \ , \quad \langle A_2 u, v\rangle := \int_\Omega \{b(x,u,\nabla u)\, v\}\, dx \ ,$$

sind dann wegen

$$|\langle A_1 u, v\rangle| \le \|a(\cdot,u(\cdot),\nabla u(\cdot))\|_{L_2^2(\Omega)} \|v\|_1 \ ,$$

$$|\langle A_2 u, v\rangle| \le \|b(\cdot,u(\cdot),\nabla u(\cdot))\|_{0,p/(p-1)} \|v\|_{0,p}$$

$$\le c_p \|b(\cdot,u(\cdot),\nabla u(\cdot))\|_{0,p/(p-1)} \|v\|_1 \ ,$$

beschränkt. Seien jetzt $u^k \in H^1(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, mit $\|u^k - u\|_1 \to 0$.
Wegen

$$|\langle A_1 u^k - A_1 u, v\rangle| \le \|a(\cdot,u^k(\cdot),\nabla u^k(\cdot)) - a(\cdot,u(\cdot),\nabla u(\cdot))\|_{L_2^2(\Omega)} \cdot \|v\|_1 \ ,$$

$$|\langle A_2 u^k - A_2 u, v\rangle| \le \|b(\cdot,u^k(\cdot),\nabla u^k(\cdot)) - b(\cdot,u(\cdot),\nabla u(\cdot))\|_{0,p/(p-1)} \cdot \|v\|_{0,p}$$

$$\le c_p \|b(\cdot,u^k(\cdot),\nabla u^k(\cdot)) - b(\cdot,u(\cdot),\nabla u(\cdot))\|_{0,p/(p-1)} \|v\|_1$$

sind A_1 und A_2 auch stetig. Also ist auch $A = A_1 + A_2 - f$ stetig.

(iii) Wir zeigen jetzt die Beschränktheit von A' .

Wegen (A2) sind die Nemyzki-Operatoren

$$L_p(\Omega) \times L_2^2(\Omega) \to L^2_{2p/(p-2)}(\Omega) \ , \quad (z,\zeta) \mapsto \gamma_i(\cdot,z(\cdot),\zeta(\cdot)) \ , \quad i = 1,2,$$

$$L_p(\Omega) \times L_2^2(\Omega) \to L_{p/(p-2)}(\Omega) \ , \quad (z,\zeta) \mapsto \beta(\cdot,z(\cdot),\zeta(\cdot)) \ ,$$

stetig und beschränkt. Aufgrund desselben Arguments wie eben sind dann auch die Abbildungen

$$H^1(\Omega) \to L^2_{2p/(p-2)}(\Omega) \ , \quad u \mapsto \gamma_i(\cdot,u(\cdot),\nabla u(\cdot)) \ , \ i = 1,2,$$

$$H^1(\Omega) \to L_{p/(p-2)}(\Omega) \ , \quad u \mapsto \beta(\cdot,u(\cdot),\nabla u(\cdot)) \ ,$$

stetig und beschränkt.
Die Abbildungen $B_i : H^1(\Omega) \to L(H^1(\Omega),(H^1(\Omega))')$, $i = 1,2$,

$$\langle B_1(u)v, w\rangle := \int_\Omega \{\gamma_1(x,u,\nabla u)\cdot\nabla w\, v\}\, dx \ ,$$

$$\langle B_2(u)v, w\rangle := \int_\Omega \{\gamma_2(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v\, w\}\, dx \ ,$$

sind wegen

$$|<B_i(u)v,w>| \le c_p \, \|\gamma_i(\cdot,u(\cdot),\nabla u(\cdot))\|_{L^2_{2p/(p-2)}(\Omega)} \, \|v\|_1 \, \|w\|_1$$

beschränkt und wegen

$$|<[B_i(u^k) - B_i(u)]v,w>| \le c_p \, \|\gamma_i(\cdot,u^k(\cdot),\nabla u^k(\cdot)) - \gamma_i(\cdot,u(\cdot),\nabla u(\cdot))\|_{L^2_{2p/(p-2)}(\Omega)} \, \|v\|_1 \, \|w\|_1$$

auch stetig.

Analog folgt die Stetigkeit und Beschränktheit von

$$B_3 : H^1(\Omega) \to L(H^1(\Omega),(H^1(\Omega))') ,$$

$$<B_3(u)v,w> := \int_\Omega \{\beta(x,u,\nabla u)\, v\, w\}dx .$$

Außerdem gilt für

$$B_4 : H^1(\Omega) \to L(H^1(\Omega),(H^1(\Omega))') ,$$

$$<B_4(u)v,w> := \int_\Omega \{\nabla w^t \alpha(x,u,\nabla u)\nabla v\}\, dx ,$$

$$|<B_4(u)v,w>| \le c \, \|v\|_1 \, \|w\|_1 .$$

B_4 ist also global beschränkt. Als Summe eines global beschränkten und drei beschränkter Operatoren ist

$$B := B_1 + B_2 + B_3 + B_4 ,$$

$$B : H^1(\Omega) \to L(H^1(\Omega),(H^1(\Omega))') ,$$

eine beschränkte Abbildung.

(iv) Wir zeigen jetzt $B = A'$.

Zunächst gilt:

$$\forall x \in \Omega \;\; \forall (z^1,\zeta^1),\ (z^2,\zeta^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \;\; \forall t \in \mathbb{R}:$$

$$\begin{aligned}
&|a(x,z^1 + tz^2, \zeta^1 + t\zeta^2) - a(x,z^1,\zeta^1)| \\
&= \left|\int_0^t \{\alpha(x,z^1 + sz^2,\zeta^1 + s\zeta^2)\zeta^2 + \gamma_1(x,z^1 + sz^2,\zeta^1 + s\zeta^2)\, z^2\}ds\right| \\
&\le \int_0^{|t|} c\,\{|\zeta^2| + (1 + |z^1 + sz^2|^{(p-2)/2} + |\zeta^1 + s\zeta^2|^{(p-2)/p}) \\
&\qquad \cdot |z^2|\}\, ds \\
&\le |t|\, c\{|\zeta^2| + (1 + |z^1|^{(p-2)/2} + |z^2|^{(p-2)/2} + |\zeta^1|^{(p-2)/p} \\
&\qquad + |\zeta^2|^{(p-2)/p})\, |z^2|\} .
\end{aligned}$$

Für $u,v,w \in H^1(\Omega)$ gilt $u,v \in L_p(\Omega)$, $|u|^{(p-2)/2}$, $|v|^{(p-2)/2} \in L_{2p/(p-2)}(\Omega)$ und $|v||\nabla w| \in L_{2p/(p+2)}(\Omega)$. Für $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, ist dann

$$\frac{1}{|t|} |a(\cdot,u+tv,\nabla u+t\nabla v) - a(\cdot,u,\nabla u)||\nabla w|$$

$$\leq c \{ |\nabla v||\nabla w| + (1 + |u|^{(p-2)/2} + |v|^{(p-2)/2} + |\nabla u|^{(p-2)/p} + |\nabla v|^{(p-2)/p}) |v||\nabla w| \}$$

$$\in L_1(\Omega) .$$

Außerdem gilt

$$\frac{1}{t} (a(\cdot,u+tv,\nabla u+t\nabla v) - a(\cdot,u,\nabla u)) \to \alpha(\cdot,u,\nabla u)\nabla v + \gamma_1(\cdot,u,\nabla u)\, v$$

für $t \to 0$, punktweise f.ü. auf Ω . Nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz ist dann

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega \{ (a(x,u+tv,\nabla u+t\nabla v) - a(x,u,\nabla u)) \cdot \nabla w \}\, dx$$

$$= \int_\Omega \{ \nabla w^t \alpha(x,u,\nabla u)\nabla v + \gamma_1(x,u,\nabla u) \cdot \nabla w\, v \}\, dx .$$

Analog gilt

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega \{ (b(x,u+tv,\nabla u+t\nabla v) - b(x,u,\nabla u))\, w \}\, dx$$

$$= \int_\Omega \{ \gamma_2(x,u,\nabla u) \cdot \nabla v\, w + \beta(x,u,\nabla u)\, v\, w \}\, dx .$$

Also ist A differenzierbar mit Ableitung $A' = B$. Damit sind die Behauptungen (a) und (b) bewiesen; (c) folgt mit Lemma 3.1.15 .

(v) Wir zeigen noch die Behauptung (d).

Für $a(x,z,\zeta) = \alpha(x)\zeta$ ist

$$\langle A'(u)v,w \rangle = \int_\Omega \{ \nabla w^t \alpha(x)\nabla v + \gamma_2(x,u,\nabla u) \cdot \nabla v\, w + \beta(x,u,\nabla u)\, v\, w \}\, dx .$$

Die Koeffizientenfunktion α induziert hier einen konstanten und damit auch stetigen Operator B_4 . Die Koeffizientenfunktionen γ_2 und β induzieren nach dem unter (iii) gesagten stetige Operatoren B_2 und B_3 . Damit ist

$$A' = B_4 + B_2 + B_3 : H^1(\Omega) \to L(H^1(\Omega),(H^1(\Omega))')$$

stetig.

##

3.3 Monotonieeigenschaften

Für Potentialoperatoren (klassisch $Au = -\mathrm{div}(a(x,\nabla u)) + b(x,u) - f$) sind explizite, hinreichende Bedingungen für die starke Monotonie von A bekannt. Der unsymmetrische Fall (klassisch $Au = -\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u)) + b(x,u,\nabla u) - f$) scheint bisher nicht näher studiert worden zu sein. Wir untersuchen hier explizite und leicht nachprüfbare Bedingungen an die Ableitungen der Koeffizientenfunktionen a und b, aus denen die starke Monotonie von A folgt.

Dazu modifizieren wir zunächst eine Friedrichssche Ungleichung. Eine um einen Zusatzterm erweiterte Abschätzung erlaubt dann sogar eine Monotonieaussage für Funktionen, die nicht notwendig eine Dirichlet-Randbedingung erfüllen. Diese Eigenschaft werden wir später mit Vorteil für Energienorm-Fehlerabschätzungen bei inhomogenen Randbedingungen einsetzen.

Wir zeigen die starke Monotonie von A mit Hilfe von Lemma 3.1.16. Zum Nachweis der dort gestellten Voraussetzungen untersuchen wir jetzt $A'(u)$ auf positive Definitheit. Dazu schätzen wir die Anteile von $A'(u)$ einzeln ab und verrechnen sie dann mit Hilfe einer verallgemeinerten Friedrichsschen Ungleichung, die wir deshalb hier beweisen.

Lemma 3.3.1 ("Friedrichssche Ungleichung")

Seien

$$\lambda(\infty) := \inf \left\{ \frac{|v|_1^2}{\|v\|_0^2} \;\middle|\; v \in H_o^1(\Omega),\ v \neq 0 \right\} ,$$

$$c(\Omega,\infty) := \lambda(\infty)^{-1/2} .$$

Dann gilt:

$$\forall\, c > c(\Omega,\infty)\ \ \exists\, \kappa \geq 0\ \ \forall\, v \in H^1(\Omega) :$$

$$\|v\|_0^2 \leq c^2 \left(|v|_1^2 + \kappa \|v\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 \right) . \tag{3.3.1}$$

Bemerkungen 3.3.2

(a) Die Friedrichssche Ungleichung wird meistens in der Form

$$\forall\, v \in H^1(\Omega) : \|v\|_0^2 \le c^2 \left(|v|_1^2 + \|v\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 \right)$$

angegeben. Dabei gilt für die Konstante c stets $c > c(\Omega,\infty)$. Unsere Verallgemeinerung liefert kleinere numerische Werte dieser Konstanten.

(b) Der Nachweis von (3.3.1) führt auf das Studium der Eigenwertaufgabe

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{auf } \Omega ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \kappa u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega ,$$

und zwar besteht zwischen dem kleinsten Eigenwert λ und der optimalen Konstanten c in (3.3.1) der Zusammenhang $\lambda c^2 = 1$. Die Eigenwerte der obigen Eigenwertaufgabe verhalten sich bei Gebietstransformationen $\Omega \to \Omega'$ aber völlig undurchsichtig. Insbesondere gibt es hierfür keine Vergleichssätze

$$\lambda' \le \lambda \le \lambda" \quad \text{für} \quad \Omega" \subset \Omega \subset \Omega' .$$

In unserer Formulierung der Friedrichsschen Ungleichung muß demgegenüber der kleinste Eigenwert der bedeutend einfacheren Aufgabe

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{auf } \Omega ,$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega ,$$

nach unten abgeschätzt werden.

#

Beweis von Lemma 3.3.1:

Setze

$$\lambda(\kappa) := \inf \{ \frac{|v|_1^2 + \kappa \|v\|_{L_2(\partial\Omega)}^2}{\|v\|_0^2} \mid v \in H^1(\Omega),\ v \neq 0 \}$$

für $0 < \kappa < \infty$. Wegen $v|_{\partial\Omega} = 0$, $v \in H_o^1(\Omega)$, ist für alle $\kappa \in \mathbb{R}^+$

$$\lambda(\infty) = \inf \{ \frac{|v|_1^2 + \kappa \|v\|_{L_2(\partial\Omega)}^2}{\|v\|_0^2} \mid v \in H_o^1(\Omega),\ v \neq 0 \} \ge \lambda(\kappa) .$$

Wir zeigen jetzt, daß für genügend große κ der Abstand $\lambda(\infty) - \lambda(\kappa)$ beliebig klein gemacht werden kann, d.h.

$$\forall\, \lambda < \lambda(\infty)\ \ \exists\, \kappa > 0\ \ \forall\, v \in H^1(\Omega)\ :$$

$$|v|_1^2 + \kappa \|v\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \geq \lambda \|v\|_0^2 .$$

Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis. Es gelte also:

$$\exists\, \lambda < \lambda(\infty)\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \exists\, v_n \in H^1(\Omega)\ :\ \|v_n\|_0 = 1 \ \wedge$$

$$|v_n|_1^2 + n \|v_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)} < \lambda .$$

Insbesondere ist dann $|v_n|_1 < \lambda^{1/2}$ und

$$\|v_n\|_{L_2(\partial\Omega)} < \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{1/2} \to 0\ ,\ n\to\infty\ ,$$

also $v_n|_{\partial\Omega} \to 0$ in $L_2(\partial\Omega)$.

Jetzt ist wegen $\|v_n\|_1^2 = \|v_n\|_0^2 + |v_n|_1^2 < 1 + \lambda$, $n \in \mathbb{N}$, die Folge (v_n) beschränkt in $H^1(\Omega)$. Es existiert daher eine Teilfolge $(v_{n_k})_k$, die in $H^1(\Omega)$ schwach konvergiert, $v_{n_k} \rightharpoonup v$ in $H^1(\Omega)$. Nach dem Rellichschen Auswahlsatz [1)] ist dann $v_{n_k} \to v$ in $L_2(\Omega)$ und daher $\|v\|_0 = \lim \|v_{n_k}\|_0 = 1$. Außerdem ist wegen der Stetigkeit des Spuroperators $v_{n_k}|_{\partial\Omega} \rightharpoonup v|_{\partial\Omega}$ in $L_2(\partial\Omega)$. Da andererseits $v_{n_k}|_{\partial\Omega} \to 0$ in $L_2(\partial\Omega)$ gilt, ist $v|_{\partial\Omega} = 0$ und damit $v \in H_0^1(\Omega)$.
Wegen der schwach-Unterhalbstetigkeit der $|\cdot|_1$-Seminorm ist

$$|v|_1^2 \leq \liminf_{k\to\infty} |v_{n_k}|_1^2 \leq \lambda = \lambda \|v\|_0^2 .$$

Es gilt also $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \neq 0$ und

$$\frac{|v|_1^2}{\|v\|_0^2} \leq \lambda < \lambda(\infty) ,$$

im Widerspruch zur Definition von $\lambda(\infty)$.

---

1) Siehe [1; Th. 6.2, part I, S.144].

Somit gilt:

$$\forall\, \lambda < \lambda(\infty)\ \ \exists\, \kappa \geq 0\ \ \forall\, v \in H^1(\Omega)\ :$$

$$|v|_1^2 + \kappa \|v\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \geq \lambda \|v\|_0^2 \ .$$

Für alle $c > c(\Omega,\infty)$ ist dann $\lambda := c^{-2} < c(\Omega,\infty)^{-2} = \lambda(\infty)$ und damit

$$\exists\, \kappa \geq 0\ \ \forall\, v \in H^1(\Omega)\ :$$

$$\frac{1}{c^2} \|v\|_0^2 = \lambda \|v\|_0^2 \leq |v|_1^2 + \kappa \|v\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \ .$$

##

Bemerkungen 3.3.3

(a) Für die Konstante $c(\Omega,\infty)$ gelten - im Gegensatz zu $c(\Omega,\kappa)$ mit $\kappa < \infty$ - Vergleichssätze:

Ist $\Omega \subset \Omega'$, dann ist (mittels Fortsetzung mit Null) $H_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega')$ und daher

$$c(\Omega,\infty)^{-2} = \lambda(\Omega,\infty) = \inf \{ \frac{|v|^2_{1,\Omega'}}{\|v\|^2_{0,\Omega'}} \mid v \in H_0^1(\Omega),\ v \neq 0 \}$$

$$\geq \inf \{ \frac{|v|^2_{1,\Omega'}}{\|v\|^2_{0,\Omega'}} \mid v \in H_0^1(\Omega'),\ v \neq 0 \} = \lambda(\Omega',\infty) = c(\Omega',\infty)^{-2} \ ,$$

also

$$c(\Omega,\infty) \leq c(\Omega',\infty) \quad \text{für} \quad \Omega \subset \Omega' \ .$$

(b) Die Konstante $c(\Omega,\infty)$ verhält sich bei Streckungen des Gebietes, $\Omega \to \Omega'$, $x \mapsto sx$ mit $s \in \mathbb{R}^+$, "positiv homogen", d.h.

$$\forall\, s \in \mathbb{R}^+ : c(s\Omega,\infty) = s \cdot c(\Omega,\infty) \ .$$

Es gilt nämlich:

$$c(s\Omega,\infty)^{-2} = \lambda(s\Omega,\infty) = \inf \{ \frac{|v|^2_{1,s\Omega}}{\|v\|^2_{0,s\Omega}} \mid v \in H_0^1(s\Omega),\ v \neq 0 \}$$

$$= \inf \{ \frac{|v|^2_{1,\Omega}}{s^2 \|v\|^2_{0,\Omega}} \mid v \in H_0^1(\Omega),\ v \neq 0 \} = \frac{1}{s^2} \lambda(\Omega,\infty) =$$

$$= (s \cdot c(\Omega,\infty))^{-2} \ .$$

(c) Für das Einheitsquadrat $Q := (0,1) \times (0,1)$ berechnet man über Separation der Variablen $c(Q,\infty)^2 = 1/(2\pi^2)$. Beachtet man noch, daß $c(\Omega,\infty)$ invariant unter Translationen von Ω ist, dann ergibt sich daraus der folgende Vergleichssatz:

Ist $a > 0$ und $\Omega \subset (-a,a) \times (-a,a)$, dann gilt:

$$c(\Omega,\infty) \leq c((-a,a) \times (-a,a),\infty) = 2a \cdot c((0,1) \times (0,1),\infty)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} a \ .$$

#

Satz 3.3.4

Es seien (A1), (A2), (A3) erfüllt und $g \in H^1(\Omega)$.

Dann ist A stark monoton auf $H^1_g(\Omega)$; es gilt sogar

$$\exists\, m > 0 \ \exists\, c \in \mathbb{R} \ \forall\, u,v \in H^1(\Omega) :$$

$$(3.3.2) \quad \langle Au-Av, u-v \rangle \geq m |u-v|_1^2 - c \, \|u-v\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \ .$$

Beweis:

(i) Wir zeigen zuerst für den linearen Operator $B := A'(u)$ gleichmäßig bezüglich $u \in H^1(\Omega)$ die Abschätzung

$$\exists\, m > 0 \ \exists\, c \in \mathbb{R} \ \forall\, u,v \in H^1(\Omega) :$$

$$(3.3.3) \quad \langle Bv, v \rangle = \langle A'(u)v, v \rangle \geq m |v|_1^2 - c \, \|v\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \ .$$

Dazu zerlegen wir $\langle Bv, v \rangle$ in drei Anteile, die wir einzeln abschätzen. Seien also $u,v \in H^1(\Omega)$.

Zunächst ist wegen

$$\forall\, x \in \Omega \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^2 : \xi^t \alpha(x,u(x),\nabla u(x)) \xi \geq m_o |\xi|^2$$

$$\int_\Omega \{ \nabla v^t \alpha(x,u,\nabla u) \nabla v \} \, dx \geq m_o |v|_1^2 \ .$$

Als nächstes wählen wir eine Funktion $\gamma_o \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ und $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Dann ist

$$\int_\Omega \{ \nabla v \cdot (\gamma_o(x)\, v) \} \, dx = \int_{\partial\Omega} \{ v \, n(x) \cdot \gamma_o(x) \, v \} \, d\omega(x) -$$

$$- \int_\Omega \{ v \, \mathrm{div}(\gamma_o(x)\, v) \} \, dx =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \{ n(x) \cdot \gamma_0(x)\ v^2 \}\, d\omega(x) - \int_{\Omega} \{ v^2\ \mathrm{div}(\gamma_0(x)) \}\, dx$$
$$- \int_{\Omega} \{ \gamma_0(x) \cdot \nabla v\ v \}\, dx ,$$

also

$$2 \int_{\Omega} \{ \gamma_0(x) \cdot \nabla v\ v \}\, dx = \int_{\partial\Omega} \{ n(x) \cdot \gamma_0(x)\ v^2 \}\, d\omega(x)$$
$$- \int_{\Omega} \{ v^2\ \mathrm{div}(\gamma_0(x)) \}\, dx$$
$$\geq - \| \gamma_0 \|_{L_\infty^2(\Omega)} \| v \|^2_{L_2(\partial\Omega)} - \sup_{x \in \Omega} (\mathrm{div}(\gamma_0(x))) \| v \|^2_0 .$$

Gilt jetzt zusätzlich

$$\forall\, x \in \Omega : \mathrm{div}(\gamma_0(x)) \leq 0 ,$$

dann ist

$$\int_{\Omega} \{ \gamma_0(x) \cdot \nabla v\ v \}\, dx \geq -\frac{1}{2} \| \gamma_0 \|_{L_\infty^2(\Omega)} \| v \|^2_{L_2(\partial\Omega)} .$$

Mit einem Dichtheitsargument folgt diese Ungleichung auch für $v \in H^1(\Omega)$. Für alle $v \in H^1(\Omega)$ gilt also

$$\int_{\Omega} \{ (\gamma_1(x,u,\nabla u) + \gamma_2(x,u,\nabla u)) \cdot \nabla v\ v \}\, dx$$
$$= \int_{\Omega} \{ (\gamma_1(x,u,\nabla u) + \gamma_2(x,u,\nabla u) - \gamma_0(x)) \cdot \nabla v\ v \}\, dx$$
$$+ \int_{\Omega} \{ \gamma_0(x) \cdot \nabla v\ v \}\, dx$$
$$\geq - \mu_1 |v|_1 \| v \|_0 - \frac{1}{2} \| \gamma_0 \|_{L_\infty^2(\Omega)} \| v \|^2_{L_2(\partial\Omega)} .$$

Für den dritten Term von $\langle Bv,v \rangle$ gilt:

$$\int_{\Omega} \{ \beta(x,u,\nabla u)\ v^2 \}\, dx \geq \mu_2 \| v \|^2_0 .$$

Insgesamt ergibt sich also $\forall\, u,v \in H^1(\Omega)$:

$$\langle Bv,v \rangle \geq m_0 |v|_1^2 - \mu_1 |v|_1 \| v \|_0 - \frac{1}{2} \| \gamma_0 \|_{L_\infty^2(\Omega)} \| v \|^2_{L_2(\partial\Omega)}$$
$$+ \mu_2 \| v \|^2_0 .$$

Wir verrechnen jetzt die einzelnen Anteile miteinander. Es gilt $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \forall\, v \in H^1(\Omega)$:

$$|v|_1 \| v \|_0 \leq \frac{\varepsilon}{2} |v|_1^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \| v \|^2_0$$

und damit

$$(3.3.4) \quad \langle Bv,v \rangle \geq (m_0 - \frac{\varepsilon}{2}\mu_1) |v|_1^2 + (\mu_2 - \frac{1}{2\varepsilon}\mu_1) \| v \|^2_0$$
$$- \frac{1}{2} \| \gamma_0 \|_{L_\infty^2(\Omega)} \| v \|^2_{L_2(\partial\Omega)} .$$

Wir definieren uns jetzt (vgl. Fig. 4 , S.34)

$$\varphi(t;c) := \begin{cases} \frac{t}{c} - \frac{m_\circ}{c^2} & \text{für } 0 \leq t < \frac{2m_\circ}{c} , \\ \frac{t^2}{4m_\circ} & \text{für } \frac{2m_\circ}{c} \leq t . \end{cases}$$

Dann ist $\varphi \in C(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+)$, und wegen $\mu_2 > \varphi(\mu_1;c(\Omega,\infty))$ existiert ein $c_1 > c(\Omega,\infty)$ mit $\mu_2 > \varphi(\mu_1;c_1)$. Die modifizierte Friedrichssche Ungleichung (3.3.1) liefert die Existenz von $\kappa \geq 0$ mit

$$\forall v \in H^1(\Omega) : \|v\|_0^2 \leq c_1^2 (|v|_1^2 + \kappa \|v\|_{L_2(\partial\Omega)}^2) .$$

Wir setzen jetzt $\varepsilon := c_1$ in (3.3.4), schätzen $\|v\|_0^2$ mit der Friedrichsschen Ungleichung ab und erhalten mit

$$m_1 := m_\circ + c_1^2 \mu_2 - c_1 \mu_1 ,$$

$$c_2 := c_1^2 \kappa (\mu_2 - \frac{1}{2c_1} \mu_1) - \frac{1}{2} \|\gamma_\circ\|_{L_\infty^2(\Omega)} ,$$

$$\begin{aligned} \langle Bv,v \rangle &\geq [m_\circ - \frac{c_1}{2} \mu_1 + c_1^2 (\mu_2 - \frac{1}{2c_1} \mu_1)] |v|_1^2 \\ &\quad + [c_1^2 \kappa (\mu_2 - \frac{1}{2c_1} \mu_1) - \frac{1}{2} \|\gamma_\circ\|_{L_\infty^2(\Omega)}] \|v\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 \\ &= m_1 |v|_1^2 + c_2 \|v\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 . \end{aligned}$$

Diese Abschätzung gelingt, falls

$$\mu_2 - \frac{1}{2\varepsilon} \mu_1 = \mu_2 - \frac{1}{2c_1} \mu_1 \leq 0 ,$$

also für

$$\mu_2 \leq \frac{1}{2c_1} \mu_1 .$$

Für $0 \leq \mu_1 < \frac{2m_\circ}{c_1}$ ist $\varphi(\mu_1;c_1) = \frac{\mu_1}{c_1} - \frac{m_\circ}{c_1^2}$. Wegen $\mu_2 > \varphi(\mu_1;c_1)$ gilt also $m_1 > 0$.
Für die Parameterpaare

$$\{ (\mu_1,\mu_2) \mid 0 \leq \mu_1 < \frac{2m_\circ}{c_1} \wedge \frac{\mu_1}{c_1} - \frac{m_\circ}{c_1^2} < \mu_2 \leq \frac{\mu_1}{2c_1} \}$$

ist damit (3.3.3) gezeigt.

Für die restlichen Parameterpaare (μ_1,μ_2) setzen wir in (3.3.4) ε so, daß $\mu_2 - \frac{1}{2\varepsilon} \mu_1 = 0$ ist. Das ist für

$\varepsilon := \frac{\mu_1}{2\mu_2}$ der Fall. Für $\mu_2 > 0$ ist $\varepsilon > 0$. Mit

$$m_2 := m_\circ - \frac{\mu_1^2}{4\mu_2} ,$$

$$c_3 := -\frac{1}{2} \|\gamma_\circ\|_{L_\infty^2(\Omega)} ,$$

ergibt sich aus (3.3.4) dann

$$\langle Bv,v\rangle \geq m_2 |v|_1^2 + c_3 \|v\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 .$$

Für $\mu_2 > \frac{\mu_1^2}{4m_\circ}$ ist $m_2 > 0$.

Wegen $\mu_2 > \varphi(\mu_1;c_1)$ ist das insbesondere für $\mu_1 \geq \frac{2m_\circ}{c_1}$ der Fall.

Aber auch für $0 \leq \mu_1 \leq \frac{2m_\circ}{c}$ und $\mu_2 > \frac{\mu_1}{2c_1}$, denn dafür ist

$$\frac{\mu_1^2}{4m_\circ} \leq \frac{\mu_1}{2c_1} < \mu_2 .$$

Damit ist (3.3.3) auch für die restlichen Parameterpaare gezeigt.

Insgesamt gilt also:

$$\exists\, m > 0 \;\; \exists\, c \in \mathbb{R} \;\; \forall\, u,v \in H^1(\Omega) :$$

$$\langle Bv,v\rangle = \langle A'(u)v,v\rangle \geq m|v|_1^1 - c\,\|v\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 .$$

(ii) Wir wenden jetzt Lemma 3.1.16(b) auf den Operator

$$\tilde{A} : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))' ,$$

$$\langle \tilde{A}u,v\rangle := \langle Au,v\rangle + (c+m) \int_{\partial\Omega} \{uv\}d\omega(x) ,$$

und $D := X_\circ := X := H^1(\Omega)$ an, wobei wir X mit der (äquivalenten) Norm

$$\|v\| := (|v|_1^2 + \|v\|_{L_2(\partial\Omega)}^2)^{1/2}$$

versehen.

Dann ist für alle $u,v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\langle Au-Av,u-v\rangle &= \langle \tilde{A}u-\tilde{A}v,u-v\rangle - (c+m)\,\|u-v\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \\
&\geq m\,(\,|u-v|_1^2 + \|u-v\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\,) - (c+m)\,\|u-v\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \\
&= m|u-v|_1^2 - c\,\|u-v\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \,.
\end{aligned}$$

(iii) Für $v \in H^1_o(\Omega)$ ist schließlich

$$|v|_1^2 \leq \|v\|_1^2 = |v|_1^2 + \|v\|_0^2 \leq (c(\Omega,\infty)^2+1)\,|v|_1^2 \,.$$

Wegen $u-v \in H^1_o(\Omega)$ für $u,v \in H^1_g(\Omega)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\forall\, u,v \in H^1_g(\Omega) : \langle Au-Av,u-v\rangle &\geq m|u-v|_1^2 \\
&\geq \frac{m}{c(\Omega,\infty)^2+1}\,\|u-v\|_1^2 \,,
\end{aligned}$$

also die starke Monotonie von A auf $H^1_g(\Omega)$.

##

Die von uns untersuchten Differentialoperatoren genügen neben energetischen auch Ordnungs-Monotonieprinzipien. $H^1(\Omega)$ ist mit der Ordnung

$$u \leq v \text{ in } H^1(\Omega) \;:\Leftrightarrow$$

$$u(x) \leq v(x) \quad \text{f.ü. auf } \Omega \,,$$

ein Vektorverband [1]. Auf dem Dual $H^{-1}(\Omega)$ von $H^1_o(\Omega)$ führen wir die duale Ordnung ein. Für $f_1,f_2 \in H^{-1}(\Omega)$ sei

$$f_1 \leq f_2 \text{ in } H^{-1}(\Omega) \;:\Leftrightarrow$$

$$\forall\, v \in H^1_o(\Omega) : v \geq 0 \text{ in } H^1(\Omega) \Rightarrow \langle f_1,v\rangle \leq \langle f_2,v\rangle \,.$$

Definition 3.3.5

Sei D eine Teilmenge von $H^1(\Omega)$, $A : D \to H^{-1}(\Omega)$.

Dann heißt A invers monoton auf D $:\Leftrightarrow$

$$\forall\, u,v \in D : Au \leq Av \text{ in } H^{-1}(\Omega) \Rightarrow u \leq v \text{ in } H^1(\Omega) \,.$$

---

1) Siehe [93; Prop. 28.2, S.261].

Satz 3.3.6

Es seien (A1), (A2), (A3) erfüllt und $g \in H^1(\Omega)$.

Dann ist A invers monoton auf $H_g^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Zum Beweis verweisen wir auf [46].

##

Bemerkung 3.3.7

Es seien (A1), (A2), (A3) erfüllt und A der zugehörige Differentialoperator (3.2.2). Außerdem seien eine Dirichletsche Randbedingung $g \in H^1(\Omega)$ und ein Hindernis $\chi \in H^1(\Omega)$ mit $\chi|_{\partial\Omega} \leqq g|_{\partial\Omega}$ gegeben. Wir wollen die Lösung u^* des Hindernisproblems

$$u^* \in \mathbb{K} \quad \forall\, v \in \mathbb{K}: \langle Au^*, v-u^* \rangle \geq 0 \ ,$$

$$\mathbb{K} := \{v \in H_g^1(\Omega) \mid \ v \geq \chi \quad \text{f.ü. auf } \Omega\}$$

mit der Lösung $\tilde{u}$ des entsprechenden Randwertproblems (ohne Hindernisbedingung)

$$\tilde{u} \in H_g^1(\Omega) \quad \forall\, v \in H_g^1(\Omega) \ : \langle A\tilde{u}, v-\tilde{u} \rangle = 0$$

vergleichen.

Für $\varphi \in H_o^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ in $H^1(\Omega)$, ist $u^*+\varphi \in H_g^1(\Omega)$ und $u^* + \varphi \geq u^* \geq \chi$ f.ü. auf Ω , d.h. $u^* + \varphi \in \mathbb{K}$. Daher ist $\langle Au^*, \varphi \rangle = \langle Au^*, u^*+\varphi - u^* \rangle \geq 0$. Also gilt $Au^* \geq 0$ in $H^{-1}(\Omega)$. Andererseits ist $\tilde{u} + \varphi \in H_g^1(\Omega)$ und daher $\langle A\tilde{u}, \varphi \rangle = \langle A\tilde{u}, \tilde{u}+\varphi - \tilde{u} \rangle = 0$. Also gilt $A\tilde{u} = 0$ in $H^{-1}(\Omega)$. Sind die Lösungen noch stetig, $u^*, \tilde{u} \in C(\overline{\Omega})$, dann folgt aus Satz 3.3.6 wegen $Au^* \geq 0 = A\tilde{u}$ in $H^{-1}(\Omega)$, daß $u^* \geq \tilde{u}$ auf Ω gilt.

Denkt man an eine eingespannte, elastische Membran, dann bedeutet dieses Ergebnis, daß ein Hindernis die Membran nach oben drückt, und zwar nicht nur auf der Kontaktmenge

$$\Omega^\circ = \{x \in \Omega \mid \ u^*(x) = \chi(x)\} \ ,$$

sondern auf dem ganzen Grundgebiet Ω .

#

§4. DISKRETISIERUNG VON HINDERNISPROBLEMEN

Neben dem Ritz-Galerkin-Verfahren, das wir im folgenden besprechen, gibt es noch weitere Methoden zur Diskretisierung von Hindernisproblemen.

Ein Verfahren geht von der Formulierung eines Hindernisproblems als Komplementaritätssystem (2.2.10) aus. Ersetzung der Differential- durch entsprechende Differenzenquotienten führt dann auf ein Komplementaritätssystem im $\mathbb{R}^n$ (siehe dazu etwa [34], [99], [36]).

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, zuerst eine duale Formulierung von Hindernisproblemen herzuleiten, die anschließend mit Finiten Elementen vom gemischten Typ diskretisiert wird (siehe dazu etwa [21]).

Eine dritte Methode approximiert zuerst die ursprüngliche Variationsungleichung durch eine Schar von penaltisierenden Operatorgleichungen. Dadurch entstehen nichtlineare Randwertprobleme, die mit einem der üblichen Verfahren diskretisiert werden können (siehe dazu etwa [100], [101], [54], [56], [55]).

4.1 Das Ritz-Galerkin-Verfahren für Variationsungleichungen

In diesem Abschnitt stellen wir eine Methode zur Konstruktion von Näherungslösungen einer Variationsungleichung

(4.1.1) $u^* \in \mathbb{K} \quad \forall v \in \mathbb{K}: \langle Au^*, v-u^* \rangle \geq 0$

dar. Dabei sei $\mathbb{K}$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge eines Banachraums X und $A: X \to X'$ ein auf $\mathbb{K}$ monotoner und auf endlichdimensionalen Teilräumen von X stetiger Operator.

Wir betrachten zunächst den Spezialfall, daß A ein Potentialoperator ist. Dann ist (4.1.1) äquivalent zur Minimumaufgabe

(4.1.2) $u^* \in \mathbb{K} \quad \forall\, v \in \mathbb{K}: J(u^*) \leq J(v)$,

mit $J' = A$. Zur Diskretisierung von (4.1.2) wählen wir zuerst einen endlichdimensionalen Teilraum S_h von X . Die Berücksichtigung der in $\mathbb{K}$ verwirklichten Nebenbedingungen könnte jetzt einfach durch die Setzung $\mathbb{K}_h := \mathbb{K} \cap S_h$ geschehen. Das würde in der von uns ins Auge gefaßten, konkreten Situation eines Hindernisproblems bereits bei der Berücksichtigung der Randbedingung zu inakzeptablen Schwierigkeiten führen, von der Realisierung der Hindernisbedingung ganz zu schweigen. Deshalb diskretisieren wir auch die Nebenbedingungen. Wir wählen also eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge $\mathbb{K}_h$ von S_h und lösen die endlichdimensionale, konvexe Minimumaufgabe

(4.1.3) $u_h^* \in \mathbb{K}_h \quad \forall\, v_h \in \mathbb{K}_h : J(u_h^*) \leq J(v_h)$.

Dazu äquivalent ist die endlichdimensionale Variationsungleichung

(4.1.4) $u_h^* \in \mathbb{K}_h \quad \forall\, v_h \in \mathbb{K}_h : \langle Au_h^*, v_h - u_h^* \rangle \geq 0$.

Auch im Fall, daß A kein Potentialoperator ist, können wir die diskrete Aufgabe (4.1.4) formulieren und nennen deren Lösung u_h^* Ritz-Galerkin-Näherungslösung der Variationsungleichung (4.1.1).

Der Verzicht auf die Bedingung $\mathbb{K}_h \subset \mathbb{K}$ erlaubt uns in der konkreten Anwendung die Konstruktion von Ansatzräumen $\mathbb{K}_h$, bereitet uns aber Schwierigkeiten bei der Ausnutzung der Monotonieeigenschaften; setzen wir doch die Monotonie von A lediglich auf $\mathbb{K}$ voraus. Besonderes Augenmerk müssen wir daher auf die Effekte legen, die bei der Diskretisierung der Nebenbedingungen, d.h. beim Übergang von $\mathbb{K}$ zu $\mathbb{K}_h$, auftreten. Für die konkrete Untersuchung von Hindernisproblemen wurde dazu in Satz 3.3.4 die starke Monotoniebedingung durch Randterme modifiziert.

4.2 Die Methode der Finiten Elemente für Hindernisprobleme

In diesem Abschnitt führen wir die Konstruktion der Ansatzräume $\mathbb{K}_h$ des Ritz-Galerkin-Verfahrens für Hindernisprobleme aus. Dazu verwenden wir die Methode der Finiten Elemente.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der Gewinnung asymptotischer Konvergenzaussagen. Deshalb betrachten wir gleich eine Familie $(\mathbb{K}_h)_h$ immer besserer Approximationen $\mathbb{K}_h$ von $\mathbb{K}$, deren Maschenweiten h gegen Null gehen.

Zuerst approximieren wir Ω für jedes h durch ein polygonales Teilgebiet Ω_h, $\Omega_h \subset \Omega$. Alle Randknoten von $\partial\Omega_h$ sollen auf $\partial\Omega$ liegen. Ω_h sei weiter durch eine Triangulierung $\mathbf{T}_h$ in Dreiecke zerlegt [1]:

(4.2.1) (i) $$\overline{\Omega}_h = \bigcup_{K \in \mathbf{T}_h} K ,$$

(ii) Jedes $K \in \mathbf{T}_h$ ist ein nichtentartetes, abgeschlossenes Dreieck,

(iii) $$\forall K_1, K_2 \in \mathbf{T}_h : K_1 \neq K_2 \Rightarrow \mathring{K}_1 \cap \mathring{K}_2 = \emptyset ,$$

(iv) Jede Kante eines Dreiecks $K_1 \in \mathbf{T}_h$ ist entweder Teilmenge von $\partial\Omega_h$ oder aber Kante eines anderen Dreiecks $K_2 \in \mathbf{T}_h$, $K_2 \neq K_1$.

Wir erweitern jetzt die Triangulierung $\mathbf{T}_h$ so, daß die Erweiterung $\tilde{\mathbf{T}}_h$ Triangulierung eines Polygongebiets $\tilde{\Omega}_h$, $\Omega \subset \tilde{\Omega}_h$, ist. Die Triangulierung $\tilde{\mathbf{T}}_h$ von $\tilde{\Omega}_h$ enthält $\mathbf{T}_h$ als Teil-Triangulierung (s. Fig. 5).

---

1) Vgl. CIARLET [26; S.38ff und S.119-124].

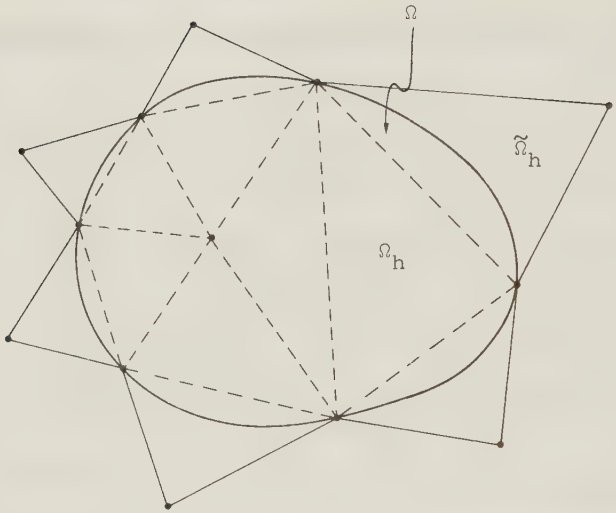

Fig. 5: Approximation von Ω durch Ω_h und $\tilde{\Omega}_h$.

Für $K \in \mathcal{T}_h$ bezeichne

$$h_K := \operatorname{diam}(K)$$

den Durchmesser von K und

$$\rho_K := \sup \{ r \geq 0 \mid \exists x^\circ \in K \ \forall x \in \mathbb{R}^2 : |x - x^\circ| \leq \frac{r}{2} \Rightarrow x \in K \}$$

den Durchmesser des Inkreises von K.

$(\tilde{\mathcal{T}}_h)_h$ sei eine reguläre Familie von Triangulierungen [1] d.h. es gelte:

(4.2.1) (v) $\quad \exists \sigma \geq 0 \ \forall h \ \forall K \in \tilde{\mathcal{T}}_h : h_K \leq \sigma \cdot \rho_K$,

(vi) $\quad \forall h \ \forall K \in \tilde{\mathcal{T}}_h : h_K \leq h$.

Mit $S_h := S_h(\tilde{\Omega}_h)$ bezeichnen wir jetzt den Raum der stetigen, auf jedem Dreieck $K \in \tilde{\mathcal{T}}_h$ linearen Funktionen über $\tilde{\Omega}_h$. Eine Basis von S_h besteht aus den "Lagrange-Basisfunktionen"

---

1) Vgl. [26; S.124].

λ_i , die charakterisiert sind durch (siehe Fig. 6):

$\lambda_i \in S_h$ und für alle Knoten P_j von $\tilde{T}_h$ gilt $\lambda_i(P_j) = \delta_{ij}$.

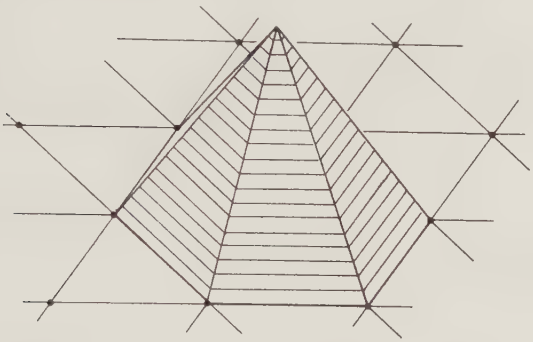

Fig. 6: Lagrange-Basisfunktionen

Der Interpolationsoperator

$$\Pi_h : C(\overline{\tilde{\Omega}_h}) \to S_h$$

ordnet jeder stetigen Funktion u auf $\overline{\tilde{\Omega}_h}$ ihre "Interpolierende"

$$\Pi_h u := \sum_i u(P_i)\ \lambda_i$$

zu.

Für eine reguläre Familie $(T_h)_h$ von Triangulierungen T_h gelten die folgenden Abschätzungen des Interpolationsfehlers: [1)]

(4.2.2) $\forall p \in [1,\infty]\ \exists C = C(\Omega,\sigma,p)\ \forall u \in W_p^2(\Omega)$:

$$\|u - \Pi_h u\|_{0,p,\Omega_h} \leq C\, h^2\, \|u\|_{2,p,\Omega} ,$$

$$\|u - \Pi_h u\|_{0,\infty,\Omega_h} \leq C\, h^{2-2/p}\, \|u\|_{2,p,\Omega} ,$$

$$\|u - \Pi_h u\|_{1,p,\Omega_h} \leq C\, h\, \|u\|_{2,p,\Omega} .$$

---

1) Siehe [26; Th.3.1.6, S.124].

Diese Abschätzungen des Interpolationsfehlers sind quasi-optimal. Die Abschätzungen (4.2.2) weisen sogar dieselben asymptotischen Fehlerordnungen auf, wie die entsprechenden Approximationsfehler, d.h. es gilt:

(4.2.3) $\forall\, p \in [1,\infty]\ \exists\, c \geq 0\ \forall u \in W_p^2(\Omega)$:

$$\|u - \Pi_h u\|_Y \leq c \inf\{\|u - v_h\|_Y \mid v_h \in S_h\},$$

mit $Y \in \{L_p(\Omega_h), L_\infty(\Omega_h), W_p^1(\Omega_h)\}$.

Eine Familie $(T_h)_h$ von Triangulierungen erfüllt eine Inversenbedingung, wenn gilt:

(4.2.4) $\exists\, \nu \geq 0\ \forall h\ \forall K \in T_h : h \leq \nu \cdot h_K$.

Für eine reguläre Familie $(T_h)_h$ von Triangulierungen, die einer Inversenbedingung genügt, gelten die folgenden Inversenungleichungen [1]:

(4.2.5) $\forall\, l,m \in \{0,1\}, l \leq m\ \forall\, p,q \in [1,\infty]\ \exists\, C = C(\sigma,\nu,p,q)$

$\forall h\ \forall u_h \in S_h(\Omega_h)$:

$$\|u_h\|_{m,q,\Omega_h} \leq C\, h^{-2\cdot\max(0,\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\, h^{l-m}\, \|u_h\|_{l,p,\Omega_h} .$$

Zu Ω existiert für jedes $m \in \mathbb{N}_0$, $p \in (1,\infty)$, ein einfacher (m,p) - Fortsetzungsoperator [2], d.h. für jedes $m \in \mathbb{N}_0$, $p \in (1,\infty)$, existiert ein stetiger linearer Operator

$$E_{m,p} : W_p^m(\Omega) \to W_p^m(\mathbb{R}^2)$$

mit

$$\forall v \in W_p^m(\Omega) : E_{m,p} v(x) = v(x) \text{ f.ü. auf } \Omega .$$

Sei $\tilde{u}$ eine $H^1(\mathbb{R}^2)$-Fortsetzung von u^*,

$$\tilde{u} := E_{1,2}\, u^* .$$

---

1) Siehe [26; Th. 3.2.6, S.140].

2) Siehe [1; Th. 4.32, S.91].

Zur Diskretisierung der Nebenbedingungen setzen wir jetzt [1]

$$(4.2.6)\qquad S_h' := \{ v_h \in S_h(\widetilde{\Omega}_h) \mid v_h = \P_h \tilde{u} \text{ auf } \widetilde{\Omega}_h \setminus \Omega_h \} ,$$

$$(4.2.7)\qquad \mathbb{K}_h := \{ v_h \in S_h' \mid v_h \geq \P_h \chi \text{ auf } \Omega_h \} .$$

Die Diskretisierung der Hindernisbedingung geschieht hier in der Weise, daß die Ungleichung $v_h(P) \geq \chi(P)$ nur noch an den Knoten P der Triangulierung $\mathcal{T}_h$ zu gelten braucht. Die Bedingung $v_h = \P_h \tilde{u}$ auf $\widetilde{\Omega}_h \setminus \Omega_h$ enthält die diskretisierte Randbedingung $v_h(P) = u^*(P) = g(P)$ für alle Randknoten $P \in \partial\Omega$ der Triangulierung $\mathcal{T}_h$, bringt aber auch zum Ausdruck, daß die diskrete Lösung nur auf dem Teilgebiet Ω_h lebt. Nur an den inneren Knoten von $\mathcal{T}_h$ sitzen ja Freiheitsgrade von $\mathbb{K}_h$. Die Funktionswerte von $v_h \in \mathbb{K}_h$ außerhalb von Ω_h haben auch keinen Anteil an den Variationsintegralen $\langle Au_h^*, v_h - u_h^* \rangle$ der diskreten Variationsungleichung (4.1.4), denn auf $\Omega \setminus \Omega_h$ ist $v_h - u_h^* = 0$.

Wir fassen zusammen. Die Ritz-Galerkin-Näherungslösung u_h^* des Hindernisproblems (2.2.9) ist definiert als Lösung der diskreten Variationsungleichung

$$(4.2.8)\qquad \begin{aligned} &u_h^* \in \mathbb{K}_h \quad \forall v_h \in \mathbb{K}_h : \langle Au_h^*, v_h - u_h^* \rangle \geq 0 , \\ &\mathbb{K}_h = \{ v_h \in S_h(\widetilde{\Omega}_h) \mid v_h = \P_h \tilde{u} \text{ auf } \widetilde{\Omega}_h \setminus \Omega_h , \\ &\qquad\qquad v_h \geq \P_h \chi \text{ auf } \Omega_h \} . \end{aligned}$$

---

[1] Vgl. etwa [20].

§5. FEHLERABSCHÄTZUNGEN IN DER ENERGIENORM

Erste Konvergenzaussagen (ohne Konvergenzordnung) für Diskretisierungen von Hindernisproblemen stammen von AUBIN [3], für nichtlineare Operatoren u.a. von MOSCO [71], SIBONY [90], SONNTAG [91]. O(h) - Abschätzungen in der Energienorm zeigen FALK [39], MOSCO & STRANG [73], BREZZI & HAGER & RAVIART [20] für lineare Operatoren, MITTELMANN [68], JANOVSKY & WHITEMAN [52], NOOR [78] für nichtlineare Operatoren. Dabei überträgt NOOR den Beweisgang bei FALK auf abstrakte, stark monotone und Lipschitz-stetige Operatoren. Die Methoden in [68] und [52] sind verhältnismäßig aufwendig und von den bei linearen Operatoren verwendeten unabhängig.

Wir verwenden hier die von CIARLET & SCHULTZ & VARGA [28] für das Ritz-Galerkin-Verfahren bei Operatorgleichungen mit stark monotonen, Lipschitz-stetigen Operatoren begründete Technik, um die Arbeit von BREZZI & HAGER & RAVIART [20] auf den Fall nichtlinearer Operatoren zu verallgemeinern. Dadurch wird zum einen das Ergebnis in [78] auf den Fall inhomogener Dirichlet-Randbedingungen und nicht notwendig polygonaler Gebiete ausgedehnt. Zum anderen werden mit einem einfacheren, einheitlichen Beweisgang die Resultate in [68] und [52] für eine größere Klasse von Hindernisproblemen gezeigt (in [68] werden Potentialoperatoren $Au = -\mathrm{div}(a(\nabla u)) - f$, in [52] im wesentlichen Operatoren $Au = -\Delta u + b(x,u,\nabla u) - f$ mit Hindernis $\chi = 0$ zugelassen).

Wir suchen die Lösung u^* des Hindernisproblems

$$(5.1)\qquad \begin{aligned} &u^* \in \mathbb{K} \quad \forall v \in \mathbb{K}: \ \langle Au^*, v-u^* \rangle \geq 0 \ , \\ &\mathbb{K} = \{ v \in H^1(\Omega) \mid \ v|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega} \ \text{ und } \ v \geq \chi \ \text{ f.ü. auf } \Omega \} \ . \end{aligned}$$

Dabei sei $A : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))'$ und $g, \chi \in H^1(\Omega)$.

Mit Hilfe der regulären Familien $(T_h)_h$ bzw. $(\tilde{T}_h)_h$ von Triangulierungen werden jetzt die Ansatzräume $S_h(\tilde{\Omega}_h)$ konstruiert. Dabei setzen wir hier $u^* \in H^2(\Omega)$ voraus. $\tilde{u}$, $\tilde{u} := E_{2,2} u^*$, sei sogar eine H^2-Fortsetzung von u^* auf $\mathbb{R}^2$. Die Ritz-Galerkin-Näherung u_h^* ist Lösung der diskreten Variationsungleichung

$$(5.2)\qquad \begin{aligned} &u_h^* \in \mathbb{K}_h \quad \forall v_h \in \mathbb{K}_h : \ \langle Au_h^*, v_h - u_h^* \rangle \geq 0 \ , \\ &\mathbb{K}_h = \{ v_h \in S_h(\tilde{\Omega}_h) \mid \ v_h = \P_h \tilde{u} \text{ auf } \tilde{\Omega}_h \setminus \Omega_h \ , \\ &\qquad\qquad v_h \geq \P_h \chi \text{ auf } \Omega_h \} \ . \end{aligned}$$

Satz 5.1

u^* sei Lösung von (5.1), u_h^* Lösung von (5.2). Außerdem gelte

$$u^*, \chi \in H^2(\Omega) \ , \quad Au^* \in L_2(\Omega) \ .$$

A genüge der modifizierten Monotoniebedingung (3.3.2) und sei für beschränkte Argumente Lipschitz-stetig, also

$$(5.3)\qquad \exists m > 0 \ \exists c \in \mathbb{R} \ \forall u, v \in H^1(\Omega) : \\ \langle Au - Av, u - v \rangle \geq m |u-v|_{1,\Omega}^2 - c \, \|u-v\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 \ ,$$

$$(5.4)\qquad \forall R \geq 0 \ \exists M_R \geq 0 \ \forall u, v, w \in H^1(\Omega) : \ \|u\|_{1,\Omega} \leq R \wedge \\ \|v\|_{1,\Omega} \leq R \Rightarrow |\langle Au - Av, w \rangle| \leq M_R \, \|u-v\|_{1,\Omega} \, \|w\|_{1,\Omega} \ .$$

Dann gilt die Fehlerabschätzung

$$(5.5)\qquad \|u^* - u_h^*\|_{1,\Omega_h}^2 \leq C \, (\, \|\tilde{u} - \P_h \tilde{u}\|_{1,\Omega}^2 + \|u^* - \P_h u^*\|_{0,\Omega_h} \\ + \|\chi - \P_h \chi\|_{0,\Omega_h} + \|\tilde{u} - \P_h \tilde{u}\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 \,)$$

mit einer von h unabhängigen Konstanten C , also

$$\|u^* - u_h^*\|_{1,\Omega_h} = O(h) \ .$$

Beweis:

(i) Zuerst zeigen wir eine a-priori-Abschätzung für $\|u_h^*\|_{1,\Omega}$ [1].

Wegen $v_h := \P_h\tilde{u} \in \mathbb{K}_h$ und der starken Monotonie von A auf $\P_h\tilde{u} + H_0^1(\Omega)$ ist

$$m\,\|u_h^* - v_h\|_{1,\Omega}^2 \leq \langle Au_h^* - Av_h, u_h^* - v_h\rangle .$$

u_h^* ist Lösung von (5.2), also gilt $\langle Au_h^*, u_h^* - v_h\rangle \leq 0$ und damit

$$\|u_h^* - v_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{m}\,\|Av_h\|_* .$$

Jetzt ist

$$\|u^* - v_h\|_{1,\Omega} = \|\tilde{u} - \P_h\tilde{u}\|_{1,\Omega} \to 0 \quad , \quad h \to 0 \quad ,$$

also insbesondere v_h beschränkt,

$$\|v_h\|_{1,\Omega} \leq c_1 .$$

Da A ein beschränkter Operator ist, ist dann auch Av_h beschränkt,

$$\|Av_h\|_* \leq c_2 .$$

Also ist

$$\begin{aligned}\|u_h^*\|_{1,\Omega} &\leq \|u_h^* - v_h\|_{1,\Omega} + \|v_h\|_{1,\Omega} \\ &\leq \frac{1}{m}\,\|Av_h\|_* + \|v_h\|_{1,\Omega} \\ &\leq \frac{1}{m}\,c_2 + c_1 ,\end{aligned}$$

unabhängig von h.

(ii) Als nächstes zerlegen wir geeignete "energetische Differenzen".

Da u_h^* Lösung von (5.2) ist und wegen $v_h \in \mathbb{K}_h$ gilt

$$\begin{aligned}\langle Au^* - Au_h^*, u^* - u_h^*\rangle &= \langle Au^* - Au_h^*, u^* - v_h\rangle + \langle Au^*, v_h - u_h^*\rangle \\ &\quad - \langle Au_h^*, v_h - u_h^*\rangle \\ &\leq \langle Au^* - Au_h^*, u^* - v_h\rangle + \langle Au^*, v_h - u_h^*\rangle .\end{aligned}$$

---

1) Vgl. [26; S.323].

(iii) Zuerst schätzen wir den zweiten Summanden ab. Wegen $Au^* \in L_2(\Omega)$ ist für alle $v \in H_o^1(\Omega)$

$$<Au^*, v> = \int_\Omega \{Au^* v\}\, dx \ .$$

Da $v_h - u_h^* \in H_o^1(\Omega)$ ist und wegen $v_h = u_h^*$ auf $\Omega \setminus \Omega_h$ gilt mit der Abkürzung $\chi_h := \P_h E_{2,2} \chi$:

$$\begin{aligned} <Au^*, v_h - u_h^*> &= \int_\Omega \{Au^*(v_h - u_h^*)\}\, dx \\ &= \int_{\Omega_h} \{Au^*[(v_h - \chi_h) - (u^* - \chi)]\}\, dx + \int_{\Omega_h} \{Au^*(u^* - \chi)\}\, dx \\ &\quad + \int_{\Omega_h} \{Au^*(\chi_h - u_h^*)\}\, dx \ . \end{aligned}$$

Die Lösung u^* des Hindernisproblems (5.1) kann nach Lemma 2.2.1 durch das Komplementaritätssystem

$$Au^*(u^* - \chi) = 0 \ , \ Au^* \geq 0 \ , \ u^* \geq \chi \ \text{f.ü. auf } \Omega$$

charakterisiert werden. Wegen $\chi_h - u_h^* \leq 0$ auf Ω_h ist deshalb

$$\begin{aligned} <Au^*, v_h - u_h^*> &\leq \int_\Omega \{Au^*[(v_h - u^*) + (\chi - \chi_h)]\}\, dx \\ &\leq \|Au^*\|_{0,\Omega_h} \left(\|u^* - \P_h u^*\|_{0,\Omega_h} + \|\chi - \P_h \chi\|_{0,\Omega_h} \right) \ . \end{aligned}$$

(iv) Jetzt schätzen wir den ersten Summanden ab. Wegen (i) liegen u^* und alle u_h^* in einer Kugel in $H^1(\Omega)$. Deshalb gilt für alle $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} <Au^* - Au_h^*, u^* - v_h> &\leq M \|u^* - u_h^*\|_{1,\Omega} \|u^* - v_h\|_{1,\Omega} \\ &\leq \varepsilon \|u^* - u_h^*\|_{1,\Omega}^2 + \frac{M^2}{4\varepsilon} \|u^* - v_h\|_{1,\Omega}^2 \\ &= \varepsilon \|u^* - u_h^*\|_{1,\Omega}^2 + \frac{M^2}{4\varepsilon} \|\tilde{u} - \P_h \tilde{u}\|_{1,\Omega}^2 \ . \end{aligned}$$

(v) Die Friedrichssche Ungleichung (3.3.1) und die modifizierte Monotoniebedingung (5.3) liefern jetzt zusammen mit (ii)-(iv) die Fehlerabschätzung.

$$\begin{aligned} m \|u^* - u_h^*\|_{1,\Omega}^2 &\leq m \left(c_3 |u^* - u_h^*|_{1,\Omega}^2 + c_4 \|u^* - u_h^*\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 \right) \\ &\leq c_3 <Au^* - Au_h^*, u^* - u_h^*> + c_5 \|u^* - u_h^*\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 \end{aligned}$$

$$\leq c_3 \left[\varepsilon \|u^*-u_h^*\|^2_{1,\Omega} + \frac{M^2}{4\varepsilon} \|\tilde{u} - \P_h\tilde{u}\|^2_{1,\Omega}\right.$$

$$\left. + \|Au^*\|_{0,\Omega_h} \left(\|u^* - \P_h u^*\|_{0,\Omega_h} + \|\chi - \P_h\chi\|_{0,\Omega_h} \right) \right]$$

$$+ c_5 \|u^*-u_h^*\|^2_{L_2(\partial\Omega)} .$$

Mit $\varepsilon := \frac{m}{2c_3}$ und wegen $u_h^* = \P_h\tilde{u}$ auf $\partial\Omega$ ergibt sich daraus

$$\frac{m}{2} \|u^*-u_h^*\|^2_{1,\Omega} \leq c_3 \left[\frac{M^2 c_3}{2m} \|\tilde{u} - \P_h\tilde{u}\|^2_{1,\Omega}\right.$$

$$\left. + \|Au^*\|_{0,\Omega} \left(\|u^* - \P_h u^*\|_{0,\Omega_h} + \|\chi - \P_h\chi\|_{0,\Omega_h} \right) \right]$$

$$+ c_5 \|\tilde{u} - \P_h\tilde{u}\|^2_{L_2(\partial\Omega)} .$$

Mit

$$C := \frac{2}{m} \max \left(\frac{M^2 c_3^2}{2m} , c_3 \|Au^*\|_{0,\Omega} , c_5 \right)$$

folgt daraus (5.5).

(vi) Durch Abschätzung der einzelnen Summanden in (5.5) zeigen wir schließlich $\|u^*-u_h^*\|_{1,\Omega_h} = O(h)$.

Die Abschätzung der Interpolationsfehler liefert:

$$\|\tilde{u} - \P_h\tilde{u}\|_{1,\Omega} \leq \|\tilde{u} - \P_h\tilde{u}\|_{1,\tilde{\Omega}_h} \leq c_6 h \|\tilde{u}\|_{2,\tilde{\Omega}_h}$$

$$\leq c_6 \|E_{2,2}\| h \|u^*\|_{2,\Omega} ;$$

$$\|u^* - \P_h u^*\|_{0,\Omega_h} \leq c_6 h^2 \|u^*\|_{2,\Omega_h} \leq c_6 h^2 \|u^*\|_{2,\Omega} ;$$

$$\|\chi - \P_h\chi\|_{0,\Omega_h} \leq c_6 h^2 \|\chi\|_{2,\Omega_h} \leq c_6 h^2 \|\chi\|_{2,\Omega} .$$

Wegen der Stetigkeit des Spuroperators gilt auch

$$\|\tilde{u} - \P_h\tilde{u}\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq c_\Omega \|\tilde{u} - \P_h\tilde{u}\|_{1,\Omega} \leq \tilde{c}_6 \, c_\Omega \, h \|u^*\|_{2,\Omega} .$$

Insgesamt ergibt sich

$$\|u^*-u_h^*\|^2_{1,\Omega_h} \leq \|u^*-u_h^*\|^2_{1,\Omega} \leq$$

$$\leq C \left(c_7 h^2 \|u^*\|^2_{2,\Omega} + c_8 h^2 \|u^*\|_{2,\Omega} + c_8 h^2 \|\chi\|_{2,\Omega} + c_9 h^2 \|u^*\|^2_{2,\Omega} \right) ,$$

also

$$\|u^* - u_h^*\|_{1,\Omega_h} = O(h) .$$

##

Aus diesem Satz erhalten wir unmittelbar eine Fehlerabschätzung für Hindernisprobleme mit Differentialoperatoren, die den Voraussetzungen (A1), (A2), (A3) genügen.

Korollar 5.2

Für die Koeffizientenfunktionen a, b und f des Operators

$$A : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))' ,$$

$$\langle Au, v \rangle := \int_\Omega \{ a(x,u,\nabla u) \cdot \nabla v + b(x,u,\nabla u)\, v - f\, v \}\, dx ,$$

gelten (A1), (A2), (A3) .

Für die Lösung u^* des Hindernisproblems (5.1) gelte

$$u^* \in H^2(\Omega), \quad Au^* \in L_2(\Omega)$$

und es sei

$$\chi \in H^2(\Omega) .$$

Dann ist

$$\|u^* - u_h^*\|_{1,\Omega_h} = O(h) .$$

Beweis:

Nach Satz 3.2.4 und Satz 3.3.4 ist A Lipschitz-stetig für beschränkte Argumente und genügt der Monotoniebedingung (5.3). Satz 5.1 ist also anwendbar.

##

Bemerkung 5.3

Die Definition der Funktionen $v_h \in \mathbb{K}_h$ auf dem Randstreifen $\Omega \setminus \Omega_h$ ist unabhängig von inneren Knotenwerten. Satz 5.1 besagt daher, daß dieser Randstreifen bei der Berechnung von u_h^* unberücksichtigt bleiben darf.

#

§6. L_∞ - NORM ABSCHÄTZUNGEN

6.1 Starke diskrete Inversmonotonie

Maximum- und Ordnungsmonotonie-Prinzipien bei Differentialgleichungen reflektieren die Eigenschaften der Differentialoperatoren bezüglich der Ordnungsstruktur der Funktionenräume. Während jedoch übersichtliche Bedingungen an die partiellen Differentialoperatoren solche Eigenschaften garantieren (vgl. Satz 3.3.6), tritt in den diskretisierten Problemen eine unangenehme Verquickung von Forderungen an die Art der Diskretisierung und solchen an den Differentialoperator auf. Nichtdestoweniger bilden Ordnungseigenschaften der diskretisierten Probleme einen allgemeinen Zugang zu Fehlerabschätzungen in anderen als den natürlichen Normen.

In der Methode der Finiten Differenzen gehören insbesondere Randmaximumprinzipien zum selbstverständlichen Handwerkszeug. Im Rahmen der Methode der Finiten Elemente wurden sie zuerst von CIARLET [25] und CIARLET & RAVIART [27] untersucht. Ein diskretes Randmaximumprinzip für gewisse nichtlineare Potentialoperatoren geben HÖHN & TÖRNIG [50] an. Negative Aussagen stammen von HÖHN & MITTELMANN [49].

Wir untersuchen hier eine mit dem Randmaximumprinzip verwandte Eigenschaft, eine starke Version der diskreten Inversmonotonie. Die dafür angegebenen hinreichenden Bedingungen sind bei linearen Differentialoperatoren dieselben, die gemeinhin zur Erzielung diskreter Randmaximumprinzipien gefordert werden.

Wir weisen die starke diskrete Inversmonotonie für eine eingeschränkte Klasse von Operatoren (klassisch $Au = -\mathrm{div}(\alpha(x)\nabla u) + b(x,u,\nabla u) - f$) nach. An die Triangulierung

stellen wir dabei die zusätzliche Forderung, daß die Innenwinkel der beteiligten Teildreiecke nicht zu groß werden. Beweistechnisch führen wir die jeweiligen Aussagen mit Hilfe der Taylorformel (3.1.4) auf entsprechende für lineare Operatoren zurück. Die diskrete Inversmonotonie müssen wir dann allerdings gleichmäßig für eine ganze Klasse linearer Operatoren nachweisen, was die sorgfältige Beobachtung der auftretenden Konstanten erfordert.

Zuerst stellen wir die Voraussetzungen an die Differentialoperatoren zusammen. Und zwar betrachten wir im folgenden die eingeschränkte Klasse quasilinearer Differentialoperatoren mit linearem, isotropem (nicht notwendig homogenem) Hauptteil,

$$
\begin{aligned}
&A : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))' \ , \\
&\langle Au, v\rangle := \int_\Omega \{\alpha(x)\, \nabla u \cdot \nabla v + b(x,u,\nabla u)\, v - f\, v\}\, dx \ .
\end{aligned}
\tag{6.1.1}
$$

Diesen Abbildungen auf Sobolewräumen entsprechen die klassischen Differentialoperatoren

$$Au = -\mathrm{div}(\alpha(x)\nabla u) + b(x,u,\nabla u) - f \ .$$

Zusätzliche Voraussetzungen an die Koeffizienten 6.1.1

(A1+) Die Funktion

$$\alpha : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \ , \quad x \mapsto \alpha(x) \ ,$$

sei stetig und die Funktion

$$b : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ , \quad (x,z,\zeta) \mapsto b(x,z,\zeta) \ ,$$

sei stetig und nach z und ζ stetig differenzierbar. Außerdem sei $f \in L_\infty(\Omega)$.

Bezeichnungen:

$$\gamma := \frac{\partial}{\partial \zeta} b \ , \quad \gamma : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ ,$$

$$\beta := \frac{\partial}{\partial z} b \ , \quad \beta : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ .$$

Die Wachstumsbedingungen (A2) lauten in dieser speziellen Situation folgendermaßen:

$$\exists\, c \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^2 :$$

$$|b(x,0,0)| \leq c \,,$$

$$|\gamma(x,z,\zeta)| \leq c\,(1 + |z|^{(p-2)/2} + |\zeta|^{(p-2)/p}) \,,$$

$$|\beta(x,z,\zeta)| \leq c\,(1 + |z|^{p-2} + |\zeta|^{2(p-2)/p}) \,.$$

(A3+) Es seien die folgenden Bedingungen erfüllt:

i) $\exists\, m_o > 0 \quad \forall x \in \Omega : \alpha(x) \geq m_o$

ii) $\exists\, \gamma_o \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, $\operatorname{div}(\gamma_o) \leq 0$ auf Ω

$$\exists\, \mu_1 \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^2 :$$

$$|\gamma(x,z,\zeta) - \gamma_o(x)| \leq \mu_1$$

iii) $\exists\, \mu_2 \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^2 : \beta(x,z,\zeta) \geq \mu_2$

iv) Die Konstanten μ_1 und μ_2 erfüllen die folgenden Ungleichungen:

$$\mu_1 \geq 0 \,, \quad \mu_2 \geq 0 \quad \text{und}$$

$$\mu_2 > \begin{cases} -\dfrac{m_o}{c^2} + \dfrac{\mu_1}{c} & \text{für } \dfrac{m_o}{c} \leq \mu_1 < \dfrac{2m_o}{c} \,, \\[2ex] \dfrac{\mu_1^2}{4m_o} & \text{für } \dfrac{2m_o}{c} \leq \mu_1 \,. \end{cases}$$

Dabei ist auch hier $c = c(\Omega,\infty)$ die Konstante der Friedrichsschen Ungleichung

$$\forall u \in H_o^1(\Omega) : \|u\|_0 \leq c(\Omega,\infty)\,|u|_1 \,.$$

#

Nach Satz 3.2.4 ist unter den Voraussetzungen (A1+), (A2), (A3+) der durch (6.1.1) definierte Operator A wohldefiniert und besitzt eine stetige und beschränkte Ableitung

$$
\begin{aligned}
&A' : H^1(\Omega) \to L(H^1(\Omega), (H^1(\Omega))') \ , \\
&\langle A'(u)v, w\rangle = \int_\Omega \{\alpha(x)\nabla v \cdot \nabla w + \gamma(x,u,\nabla u)\cdot \nabla v\, w + \\
&\qquad + \beta(x,u,\nabla u)\, v\, w\}\, dx \ .
\end{aligned} \tag{6.1.2}
$$

Bemerkung 6.1.2

(a) Der Hauptteil von A ist hier nicht nur ein linearer Operator, sondern darüberhinaus von spezieller Gestalt. Die Koeffizientenfunktion α ist - im Gegensatz zur Situation in 3.2.1 - eine skalare Funktion,

$$\alpha : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \ , \quad x \mapsto \alpha(x) \ .$$

(b) Für die Koeffizientenfunktion b genügen in (A1+) bereits Carathéodory-Bedingungen (vgl. Bem. 3.2.2(a)). Auf die Stetigkeit von $\alpha : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ kann man jedoch nicht ohne weiteres verzichten.

(c) In (A3+) wird zusätzlich zu den Bedingungen (A3) lediglich $\mu_2 \geq 0$ gefordert. Durch die spezielle Gestalt der Koeffizientenfunktion a vereinfachen sich hier jedoch die Bedingungen (A3) teilweise.

#

Als nächstes formulieren wir die zusätzlichen Bedingungen an die Triangulierung. Wie in 4.2 beschrieben, sei Ω durch reguläre Familien von Triangulierungen $(T_h)_h$ bzw. $(\tilde{T}_h)_h$ einbeschriebener bzw. umbeschriebener Polygongebiete Ω_h bzw. $\tilde{\Omega}_h$ approximiert. Außerdem fordern wir im folgenden das Bestehen der Inversenbedingung (4.2.4).

Die Regularitätsbedingung der Familie $(\tilde{T}_h)_h$

$$\exists \sigma \geq 0 \ \ \forall h \ \ \forall K \in \tilde{T}_h : h_K \leq \sigma\, \rho_K$$

ist zur folgenden Winkelbedingung von Zlámal äquivalent:

Die Innenwinkel θ der Dreiecke $K \in \tilde{T}_h$, $h > 0$, sind durch einen Winkel $\theta_o > 0$ nach unten beschränkt,

$$\theta \geq \theta_o \ . \tag{6.1.3}$$

Wir stellen hier eine zusätzliche Bedingung an $(\mathbf{T}_h)_h$, die die Winkel der Dreiecke nach oben beschränkt:

Weisen zwei Dreiecke einer Triangulierung $\mathbf{T}_h$, $h > 0$, eine gemeinsame Kante auf, dann gelte für die dieser Kante gegenüberliegenden Innenwinkel θ_1 und θ_2 (vgl. Fig. 7):

(6.1.4) $\theta_1 + \theta_2 \leq \pi - \theta_o$.

Dabei ist $\theta_o > 0$ eine von h unabhängige Konstante.

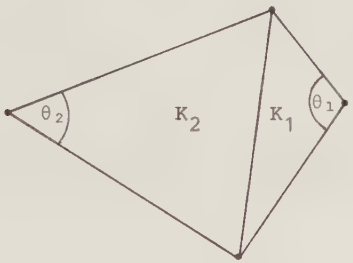

Fig. 7: Zwei Dreiecke $K_1, K_2 \in \mathbf{T}_h$ mit gemeinsamer Kante

Hinreichend für (6.1.4) ist die folgende Bedingung:

Für alle Innenwinkel θ der Dreiecke aus $\mathbf{T}_h$ gilt

(6.1.5) $\theta \leq \frac{\pi}{2} - \theta_o$.

Diese Bedingung (6.1.5) hat gegenüber (6.1.4) den Vorteil, daß sie sich bei den üblichen Verfeinerungen (d.i. Zerlegung jedes Dreiecks in 4 kongruente Teildreiecke) vererbt. Nicht jedes Polygongebiet besitzt jedoch eine Triangulierung, die (6.1.5) genügt. Wohl aber besitzt jedes Polygongebiet Familien von Triangulierungen, die der Summenbedingung (6.1.4) genügen. Diese können sogar so gewählt werden, daß die meisten Dreiecke (6.1.5) erfüllen; lediglich in Randdreiecken ist diese Bedingung verletzt.

Zur Definition der starken diskreten Inversmonotonie führen wir noch einige Bezeichnungen ein.

Die inneren Knoten der Triangulierung T_h seien von 1 bis $N = N_h$, die Randknoten von $N+1$ bis $M = M_h$ durchnumeriert.

$1_h \in S_h(\Omega_h)$ bezeichne die "innere 1-Funktion",

$$(6.1.6)\quad 1_h(P_i) = \begin{cases} 1 & \text{für innere Knoten } P_i,\ 1 \le i \le N_h, \\ 0 & \text{für Randknoten } P_i,\ N_h+1 \le i \le M_h. \end{cases}$$

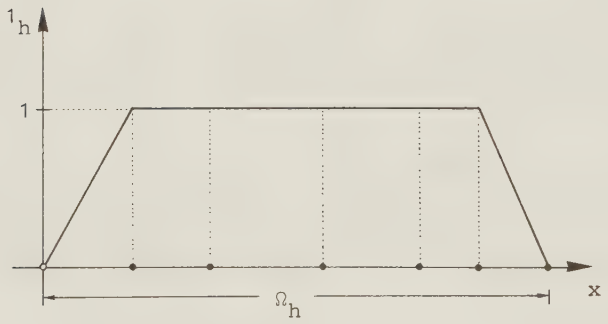

Fig. 8: Die innere 1-Funktion 1_h.

Außerdem bezeichnen wir für $g_h \in S_h(\Omega_h)$ mit

$$S_{h,g_h} := \{v_h \in S_h(\Omega_h) \mid v_h|_{\partial\Omega_h} = g_h|_{\partial\Omega_h}\}$$

den affinen Teilraum von $S_h(\Omega_h)$, der aus den Funktionen besteht, die die Randbedingung $v_h|_{\partial\Omega_h} = g_h|_{\partial\Omega_h}$ erfüllen.

Wir erinnern noch daran, daß $\lambda_i \in S_h(\Omega_h)$ die i-te Lagrange-Basisfunktion bezeichnet, $1 \le i \le M$,

$$\lambda_i(P_j) = \delta_{ij} \quad \text{für alle Knoten } P_j,\ 1 \le j \le M, \text{ von } T_h.$$

Definition 6.1.3

Sei D eine konvexe Teilmenge von $H^1(\Omega)$.

A heißt stark diskret inversmonoton auf D (bez. $(T_h)_h$) $:\Leftrightarrow$

Für alle $h > 0$ und für alle $g_h \in S_h(\Omega_h)$ gilt:

(6.1.7(a)) $\forall c \geq 0 \ \forall u_h \in S_{h,g_h} \ \forall i \in \{1,\ldots,N\}$:

$$u_h \in D \wedge u_h + c\,1_h \in D \Rightarrow \langle A(u_h + c\,1_h), \lambda_i \rangle \geq \langle Au_h, \lambda_i \rangle \ ,$$

(6.1.7(b)) $\forall u_h, v_h \in S_{h,g_h} \cap D \ \forall i \in \{1,\ldots,N\}$:

$$[u_h(P_i) \leq v_h(P_i) \vee \langle Au_h, \lambda_i \rangle \leq \langle Av_h, \lambda_i \rangle] \Rightarrow u_h \leq v_h \ .$$

A heißt asymptotisch stark diskret inversmonoton auf D , (bez. $(T_h)_h$) , wenn ein $h_o > 0$ existiert, so daß für alle $h \in (0,h_o]$ und alle $g_h \in S_h$ die Bedingungen (6.1.7) gelten.

#

Bemerkung 6.1.4

Aus (6.1.7(b)) folgt die diskrete Inversmonotonie auf D im üblichen Sinn,

$$\forall u_h, v_h \in S_{h,g_h} \cap D \ \forall i \in \{1,\ldots,N\} :$$

$$\langle Au_h, \lambda_i \rangle \leq \langle Av_h, \lambda_i \rangle \Rightarrow u_h \leq v_h \ .$$

Der von uns eingeführte Begriff der starken diskreten Inversmonotonie ist eine stärkere Bedingung, da hier nicht notwendig an allen Knoten P_i , $1 \leq i \leq N$, die Bedingung

$$\langle Au_h, \lambda_i \rangle \leq \langle Av_h, \lambda_i \rangle$$

gelten muß. In einigen Knoten darf

$$\langle Au_h, \lambda_i \rangle > \langle Av_h, \lambda_i \rangle$$

sein, falls stattdessen

$$u_h(P_i) \leq v_h(P_i)$$

erfüllt ist.

#

Als nächstes führen wir die starke diskrete Inversmonotonie für nichtlineare Operatoren A auf einen von BAIOCCHI [4] für lineare Operatoren eingeführten Begriff zurück.

Lemma 6.1.5

Sei D eine konvexe Teilmenge von $H^1(\Omega)$.
Es gelte $\exists\, h_o > 0 \;\forall h \in (0,h_o]$:

(6.1.8(a)) $\quad \forall u_h \in S_h(\Omega_h) \cap D \;.\forall i \in \{1,\ldots,N\}$:

$$\langle A'(u_h)1_h, \lambda_i \rangle \geq 0 \ ,$$

(6.1.8(b)) $\quad \forall v_h \in S_{h,0} \;\forall i \in \{1,\ldots,N\} \;\exists u_h \in S_h(\Omega_h) \cap D$:

$$[v_h(P_i) \leq 0 \;\vee\; \langle A'(u_h)v_h, \lambda_i \rangle \leq 0] \Rightarrow v_h \leq 0 \ .$$

Dann ist A asymptotisch stark diskret inversmonoton auf D.

Bemerkung 6.1.6

Die Bedingung (6.1.8(b)) ist äquivalent zu

$$\forall v_h \in S_{h,0} : v_h \not\equiv 0 \Rightarrow$$
$$\exists i \in \{1,\ldots,N\} : v_h(P_i) > 0 \wedge \forall u_h \in S_h(\Omega_h) \cap D :$$
$$\langle A'(u_h)v_h, \lambda_i \rangle > 0 \ .$$

Aus dieser Formulierung sieht man jetzt auch, daß es sich hierbei um eine Aussage handelt, die gleichmäßig für $u_h \in S_h(\Omega_h) \cap D$ gefordert wird.

#

Beweis von Lemma 6.1.5:

Nach Korollar 3.1.4 gilt die Taylorformel

$$\forall u_h, v_h \in S_h(\Omega_h) \;\forall i \in \{1,\ldots,N\} :$$
$$\langle Au_h - Av_h, \lambda_i \rangle = \int_0^1 \langle A'(v_h + t(u_h - v_h))(u_h - v_h), \lambda_i \rangle \, dt \ .$$

Sei $g_h \in S_h(\Omega_h)$ und seien $u_h, v_h \in S_{h,g_h} \cap D$ mit $u_h \neq v_h$. Dann ist $(u_h - v_h) \in S_{h,0}$ und $(u_h - v_h) \neq 0$. Außerdem ist wegen der Konvexität von D

$$\forall\, t \in [0,1] : v_h + t(u_h - v_h) \in S_h(\Omega_h) \cap D .$$

Wegen (6.1.8(b)) gibt es dann ein $i \in \{1,\ldots,N\}$, so daß gilt:

$$(u_h - v_h)(P_i) > 0$$

$$\forall\, t \in [0,1] : \langle A'(v_h + t(u_h - v_h))(u_h - v_h), \lambda_i \rangle > 0 .$$

Für dieses i ist dann auch

$$\langle Au_h - Av_h, \lambda_i \rangle > 0 .$$

Also ist (6.1.7(b)) erfüllt.

Ist jetzt $c \geq 0$ und $u_h + c\,1_h \in D$, dann ist auch

$$\forall\, t \in [0,1] : u_h + t\,c\,1_h \in S_{h,g_h} \cap D .$$

Wegen (6.1.8(a)) gilt dann für alle $i \in \{1,\ldots,N\}$:

$$\langle A(u_h + c\,1_h) - Au_h, \lambda_i \rangle = \int_0^1 c \langle A'(u_h + t\,c\,1_h)1_h, \lambda_i \rangle \, dt > 0 ,$$

d.h. auch (6.1.7(a)) ist erfüllt.

##

Zum Nachweis der starken diskreten Inversmonotonie für lineare Operatoren B müssen die Einträge der "Stiffness-Matrix" $(\langle B\lambda_i, \lambda_j \rangle)_{i,j=1,\ldots,N}$ abgeschätzt werden. Die wichtigsten der dabei auftretenden Integrale werden im folgenden Lemma abgeschätzt.

Lemma 6.1.7

Sei $K \in \mathbf{T}_h$ und seien $P_1 = (x_1^1, x_2^1)$, $P_2 = (x_1^2, x_2^2)$, $P_3 = (x_1^3, x_2^3)$ die im positiven Umlaufsinn orientierten Ecken von K. θ sei der Gegenwinkel der Kante $\overline{P_1P_3}$ (siehe Fig. 9). Sei λ_i die zum Knoten P_i gehörige Lagrange-Basisfunktion, $i = 1,2,3$.

Dann gilt

$$\int_K \{\nabla\lambda_1 \cdot \nabla\lambda_3\}\, dx = -\frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,\theta \ .$$

Außerdem gilt für $i = 1,2,3$:

$$|\nabla\lambda_i| \le \sigma^2\nu\,\frac{1}{h} \quad \text{auf } K\,, \qquad \|\lambda_i\|_1 \le \sigma^2\nu + h\,,$$

$$\forall\, p \in [1,\infty]: \quad \|\lambda_i\|_{0,p} \le h^{2/p} \ .$$

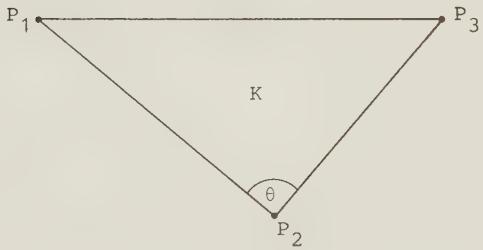

Fig. 9: Das Dreieck K mit den Ecken P_1, P_2, P_3 .

Beweis:

Aus den Interpolationsbedingungen $\lambda_i(P_j) = \delta_{ij}$, $i,j = 1,2,3$, ergeben sich auf K die Darstellungen

$$\nabla\lambda_1 = \frac{1}{2\cdot \mathrm{meas}(K)}\begin{pmatrix} -(x_2^3 - x_2^2) \\ x_1^3 - x_1^2 \end{pmatrix}, \quad \nabla\lambda_3 = \frac{1}{2\cdot \mathrm{meas}(K)}\begin{pmatrix} x_2^1 - x_2^2 \\ -(x_1^1 - x_1^2) \end{pmatrix} .$$

Wegen $\mathrm{meas}(K) = \frac{1}{2}\det(P_3 - P_2, P_1 - P_2)$ folgt daraus

$$\int_K \{\nabla\lambda_1 \cdot \nabla\lambda_3\}dx = \frac{\mathrm{meas}(K)}{(2\cdot \mathrm{meas}(K))^2}[-(x_2^3 - x_2^2)(x_2^1 - x_2^2) - (x_1^3 - x_1^2)(x_1^1 - x_1^2)]$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{(P_3 - P_2)\cdot(P_1 - P_2)}{\det(P_3 - P_2, P_1 - P_2)} = -\frac{1}{2}\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,\theta \ .$$

Außerdem ist

$$|\nabla\lambda_1| = \frac{|P_3 - P_2|}{2\cdot \mathrm{meas}(K)} \le \frac{h_K}{2\cdot \mathrm{meas}(K)} \quad \text{auf } K$$

und wegen

$$\mathrm{meas}(K) \ge \frac{\pi}{4}\,\rho_K^2 \ge \frac{\pi}{4\cdot\sigma^2}\,h_K^2$$

weiter

$$|\nabla\lambda_1| \leq \frac{2\cdot\sigma^2}{\pi}\,\frac{1}{h_K} \leq \frac{2\cdot\sigma^2\nu}{\pi}\,\frac{1}{h} \leq \sigma^2\nu\,\frac{1}{h} \quad \text{auf } K\ .$$

Jetzt ist $\mathrm{meas}(\mathrm{supp}(\lambda_1)) \leq \frac{\pi}{4}\,h^2$ und damit

$$\|\lambda_1\|_1^2 = \|\lambda_1\|_0^2 + |\lambda_1|_1^2 \leq \frac{\pi}{4}\,h^2\Big(1 + \frac{4\cdot\sigma^4\nu^2}{\pi^2}\,\frac{1}{h^2}\Big)$$
$$\leq h^2 + \sigma^4\nu^2 \leq (h + \sigma^2\nu)^2\ .$$

Schließlich ist für $p \in [1,\infty)$

$$\|\lambda_1\|_{0,p} \leq (\mathrm{meas}(\mathrm{supp}(\lambda_1)))^{1/p} \leq (\tfrac{\pi}{4}\,h^2)^{1/p} \leq h^{2/p}$$

und $\|\lambda_1\|_{0,\infty} \leq 1$.

Ganz analog zeigt man

$$\|\lambda_i\|_1 \leq h + \sigma^2\nu\ , \quad \|\lambda_i\|_{0,p} \leq h^{2/p}$$

für die anderen Knotenindices $i = 2,3$.

##

Als nächstes untersuchen wir die Eigenschaften (6.1.8) für eine Klasse linearer Operatoren, die insbesondere die Linearisierungen $A'(u_h)$ für gewisse $u_h \in S_h(\Omega_h)$ enthalten. Dazu betrachten wir zu einer Konstanten $M \geq 0$ die Menge $\mathbb{B}_M$ der linearen Operatoren

$$B : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))'\ ,$$

$$\langle Bv,w\rangle := \int_\Omega \{\alpha(x)\nabla v\cdot\nabla w + \varphi(x)\cdot\nabla v\, w + \psi(x)\, v\, w\}\,dx\ ,$$

wobei

$$\varphi \in L^2_{2p/(p-2)}(\Omega) \quad \text{mit} \quad \|\varphi\|_{L^2_{2p/(p-2)}(\Omega)} \leq M\ ,$$

$$|\varphi(x) - \gamma_0(x)| \leq \mu_1 \quad \text{f.ü. auf } \Omega\ ,$$

$$\psi \in L_{p/(p-2)}(\Omega) \quad \text{mit} \quad \|\psi\|_{0,p/(p-2)} \leq M\ ,$$

$$\psi(x) \geq \mu_2 \quad \text{f.ü. auf } \Omega\ .$$

Im Beweis von Satz 3.3.4 sahen wir, daß die Operatoren $B \in \mathbb{B}_M$ positiv definit auf $H_o^1(\Omega)$, gleichmäßig für $B \in \mathbb{B}_M$, sind, d.h.

$$\exists\, m > 0 \;\; \forall B \in \mathbb{B}_M \;\; \forall v \in H_o^1(\Omega) : \langle Bv, v\rangle \geq m \|v\|_1^2 .$$

Wir zeigen jetzt, daß sie auch (gleichmäßig für $B \in \mathbb{B}_M$) diskret inversmonoton sind.

Lemma 6.1.8

Sei $(T_h)_h$ eine reguläre Familie von Triangulierungen, die der Inversenbedingung (4.2.4) und der Winkelbedingung (6.1.4) genügt.

Dann gilt:

$$\exists\, h_o > 0 \;\; \forall h \in (0, h_o] :$$

(6.1.9(a)) $\quad \forall B \in \mathbb{B}_M \;\; \forall i \in \{1,\ldots,N\} : \langle B1_h, \lambda_i\rangle \geq 0 ,$

(6.1.9(b)) $\quad \forall v_h \in S_{h,0} \;\; \forall i \in \{1,\ldots,N\} \;\; \exists B \in \mathbb{B}_M :$

$$[v_h(P_i) \leq 0 \;\vee\; \langle Bv_h, \lambda_i\rangle \leq 0] \Rightarrow v_h \leq 0 .$$

Außerdem sind die Stiffness-Matrizen $S = (s_{ij}) \in \mathbb{R}^{N,N}$, $s_{ij} = \langle B\lambda_i, \lambda_j\rangle$, $i,j = 1,\ldots,N$, irreduzibel diagonaldominante M-Matrizen [1].

Beweis:

Sei $B \in \mathbb{B}_M$. Wir zeigen zunächst einige Eigenschaften der Stiffnessmatrix.

(i) $\quad \forall i \in \{1,\ldots,N\} : s_{ii} > 0 .$

Wegen der starken Monotonie von B auf $S_{h,0} \subset H_o^1(\Omega)$ ist

$$s_{ii} = \langle B\lambda_i, \lambda_i\rangle \geq m|\lambda_i|_1^2 > 0 .$$

(ii) $\quad \forall i \in \{1,\ldots,M\} \;\; \forall j \in \{1,\ldots,N\} : i \neq j \Rightarrow$

$s_{ij} \leq 0 \wedge s_{ji} \leq 0$. Sind die Knoten P_i und P_j benachbart, dann gilt sogar $s_{ij} < 0 \wedge s_{ji} < 0$.

---

[1] Siehe [96; S.23 und S.85], [81; S.48 und S.54f].

Zunächst ist $s_{ij} = s_{ji} = 0$, falls die Träger von λ_i und λ_j keine gemeinsamen inneren Punkte besitzen. Deshalb können wir uns auf den Fall beschränken, daß

$$\text{supp}(\lambda_i) \cap \text{supp}(\lambda_j) = \overline{K_1 \cup K_2}$$

gilt. Dabei sind $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$ zwei Dreiecke, die eine gemeinsame Kante $\overline{P_i P_j}$ aufweisen. Mit θ_1 (bzw. θ_2) bezeichnen wir den Gegenwinkel der Seite $\overline{P_i P_j}$ im Dreieck K_1 (bzw. K_2) (vgl. Fig. 10).

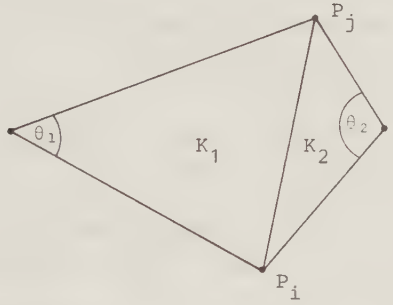

Fig. 10: Zwei Dreiecke mit gemeinsamer Kante.

s_{ij} setzt sich aus drei Anteilen zusammen,

$$s_{ij} = \langle B\lambda_i, \lambda_j \rangle = \int_\Omega \{\alpha(x) \nabla\lambda_i \cdot \nabla\lambda_j\}\, dx + \int_\Omega \{\varphi(x) \cdot \nabla\lambda_i\, \lambda_j\}\, dx + \int_\Omega \{\psi(x)\, \lambda_i\, \lambda_j\}\, dx \ .$$

Zuerst zum ersten Summanden:

$$\int_\Omega \{\alpha(x) \nabla\lambda_i \cdot \nabla\lambda_j\} dx = \int_{K_1} \{\alpha(x) \nabla\lambda_i \cdot \nabla\lambda_j\} dx + \int_{K_2} \{\alpha(x) \nabla\lambda_i \cdot \nabla\lambda_j\} dx$$

$$= \alpha(\xi_1) \int_{K_1} \{\nabla\lambda_i \cdot \nabla\lambda_j\} dx + \alpha(\xi_2) \int_{K_2} \{\nabla\lambda_i \cdot \nabla\lambda_j\} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\, \alpha(\xi_1)\, \text{ctg}\, \theta_1 - \frac{1}{2}\, \alpha(\xi_2)\, \text{ctg}\, \theta_2$$

$$= -\frac{1}{2}\, \alpha(\xi_1)\, (\text{ctg}\, \theta_1 + \text{ctg}\, \theta_2) + \frac{1}{2}\, (\alpha(\xi_1) - \alpha(\xi_2))\, \text{ctg}\, \theta_2$$

$$\leq -\frac{1}{2}\, m_0\, \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{\sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2} + \frac{1}{2}\, |\alpha(\xi_1) - \alpha(\xi_2)|\, \text{ctg}\, \theta_2 \ .$$

Dabei sind $\xi_1 \in K_1$, $\xi_2 \in K_2$. Wegen

$$0 < \theta_o \leq \theta_1 + \theta_2 \leq \pi - \theta_o < \pi ,$$

$$0 < \theta_o \leq \theta_i , \quad i = 1,2 ,$$

ist dann weiter

$$\int_\Omega \{\alpha(x) \nabla\lambda_i \cdot \nabla\lambda_j\} dx \leq -\frac{1}{2} m_o \sin\theta_o + \frac{1}{2} \omega(\alpha;2h) \operatorname{ctg}\theta_o .$$

Dabei sei $\omega(\cdot;\cdot)$ der $\|\cdot\|_{0,\infty,\Omega}$ - Stetigkeitsmodul,

$$\omega(\alpha;\delta) := \sup\{|\alpha(x) - \alpha(y)| \mid x,y \in \Omega , |x-y| < \delta\} .$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von α auf Ω ist

$$\omega(\alpha;\delta) \to 0 \quad \text{für } \delta \to 0 ,$$

also ist

$$\frac{1}{2} \omega(\alpha;2h) \operatorname{ctg}\theta_o \to 0 \quad \text{für } h \to 0 ,$$

während $-\frac{1}{2} m_o \sin\theta_o$ von h unabhängig und negativ ist. Daher gibt es ein $h_o > 0$, so daß für alle $h \in (0,h_o]$ bei benachbarten Knoten P_i und P_j gilt:

$$\int_\Omega \{\alpha(x) \nabla\lambda_i \cdot \nabla\lambda_j\} dx \leq -\frac{1}{3} m_o \sin\theta_o < 0 .$$

Als nächstes schätzen wir die restlichen Anteile von s_{ij} ab:

$$\left|\int_\Omega \{\varphi(x) \cdot \nabla\lambda_i \, \lambda_j\} dx\right| \leq \|\varphi\|_{L^2_{2p/(p-2)}(\Omega)} \|\lambda_i\|_1 \|\lambda_j\|_{0,p}$$

$$\leq M (\sigma^2 \nu + h) h^{2/p} \to 0 \quad \text{für } h \to 0 ,$$

$$\left|\int_\Omega \{\psi(x) \, \lambda_i \, \lambda_j\} dx\right| \leq \|\psi\|_{0,p/(p-2)} \|\lambda_i\|_{0,p} \|\lambda_j\|_{0,p}$$

$$\leq M h^{4/p} \to 0 \quad \text{für } h \to 0 .$$

Die restlichen Anteile von s_{ij} gehen also gegen Null für $h \to 0$. Insgesamt gilt:

$$\exists\, h_o > 0 \;\; \forall\, h \in (0,h_o] : s_{ij} < -\frac{1}{4} m_o \sin\theta_o \wedge$$

$$s_{ji} < -\frac{1}{4} m_o \sin\theta_o ,$$

für benachbarte Knoten P_i und P_j von T_h .

Dabei hängt $h_\circ$ nur von α und M, nicht aber von $B \in \mathbb{B}_M$ ab.

(iii) $\forall\, j \in \{1,\dots,N\} : \sum_{i=1}^{N} s_{ij} \geq 0$.

Wegen der Linearität von B, wegen (ii) und $\psi \geq 0$ auf Ω ist

$$\sum_{i=1}^{N} s_{ij} = \sum_{i=1}^{M} s_{ij} - \sum_{i=N+1}^{M} s_{ij} = \sum_{i=1}^{M} \langle B\lambda_i, \lambda_j \rangle - \sum_{i=N+1}^{M} s_{ij}$$

$$\geq \langle B1, \lambda_j \rangle = \int_\Omega \{\psi(x)\lambda_j\}dx \geq 0 .$$

(iv) $\exists\, j_\circ \in \{1,\dots,N\} : \sum_{i=1}^{N} s_{ij_\circ} > 0$,

dabei soll $j_\circ$ unabhängig von $B \in \mathbb{B}_M$ sein.

Falls einem Knoten $P_{j_\circ}$, $j_\circ \in \{1,\dots,N\}$, ein Randknoten P_k, $k \in \{N+1,\dots,M\}$, benachbart ist, gilt nach (ii) $s_{kj_\circ} < 0$ und wie in (iii) folgt

$$\sum_{i=1}^{N} s_{ij_\circ} \geq - \sum_{i=N+1}^{M} s_{ij_\circ} \geq - s_{ij_\circ} > 0 .$$

(v) Die Matrix S ist irreduzibel.

Diese Eigenschaft ergibt sich sofort aus (ii),

$s_{ij} < 0$ für benachbarte Knoten P_i und P_j, $i,j \in \{1,\dots,N\}$.

Die Stiffnessmatrix S ist also eine irreduzibel diagonaldominante M-Matrix (siehe [96; Cor. 1, S.85]).

Wir zeigen jetzt die Behauptungen (a) und (b). (6.1.9(a)) ist lediglich eine Umformulierung von (iii), denn

$$\langle B\, 1_h, \lambda_j \rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle B\lambda_i, \lambda_j \rangle = \sum_{i=1}^{N} s_{ij} \geq 0 .$$

Um schließlich (6.1.9(b)) zu zeigen, wählen wir $v_h \in S_{h,o}$ mit $v_h \not\equiv 0$.

v_h besitze die Basisdarstellung $v_h = \sum_{i=1}^{N} V_i \lambda_i$ mit $V \in \mathbb{R}^N$.

Es gibt dann einen Knoten mit maximalem Funktionswert δ, der dann auch positiv ist,

$$\exists\, j_1 \in \{1,\dots,N\} \;\forall\, k \in \{1,\dots,N\} : V_k \leq V_{j_1} =: \delta \wedge \delta > 0 .$$

Wir definieren die Indexmenge der globalen Maxima,

$$I := \{j \in \{1,\dots,N\} \mid \forall\, k \in \{1,\dots,N\} : V_k \leq V_j\}$$

$$= \{j \in \{1,\dots,N\} \mid V_j = \delta\} \neq \emptyset ,$$

und die Indexmenge der einem Knoten P_j benachbarten Knoten,

$$I(j) := \{i \in \{1,\dots,N\} \mid s_{ij} < 0\} , \; j \in \{1,\dots,N\} .$$

Zwei Fälle können auftreten.

1.Fall : $I = \{1,\dots,N\}$, d.h. es gibt nur Maximalknoten.
Dann ist $\forall\, j \in \{1,\dots,N\} : V_j = \delta > 0$ und

$$\langle Bv_h, \lambda_{j_o} \rangle = \delta \sum_{i=1}^{N} \langle B\lambda_i, \lambda_{j_o} \rangle = \delta \sum_{i=1}^{N} s_{ij_o} > 0 ,$$

falls j_o wie in (iv) gewählt wird.
Also ist $v_h(P_{j_o}) = V_{j_o} = \delta > 0$ und $\langle Bv_h, \lambda_{j_o} \rangle > 0$, wobei j_o einheitlich für die ganze Klasse $\mathbb{B}_M$ gewählt werden kann.

2. Fall : $I \subsetneq \{1,\dots,N\}$.
Dann gilt

$$\exists\, j_2 \in I : I(j_2) \not\subset I ,$$

denn sonst wäre

$$\forall\, j \in I : I(j) \subset I ,$$

und wegen der Irreduzibilität von S würde dann

$$I = \{1,\dots,N\}$$

gelten.

Es gibt also einen Maximalknoten P_{j_2}, der einen Knoten P_k mit kleinerem Funktionswert als unmittelbaren Nachbarn hat,

$$\exists\, j_2 \in I \;\exists\, k \in I(j_2) : k \notin I ,$$

d.h.

$$\exists\, j_2 \in I \;\exists\, k \in \{1,\dots,N\} : s_{k,j_2} < 0 \wedge V_k < \delta = V_{j_2} .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle Bv_h, \lambda_{j_2} \rangle &= \sum_{i=1}^{N} V_i\, s_{i,j_2} \\
&= \sum_{\substack{i \in I(j_2) \\ i \neq k}} V_i\, s_{i,j_2} + V_k\, s_{k,j_2} + V_{j_2}\, s_{j_2,j_2} \\
&> \sum_{\substack{i \in I(j_2) \\ i \neq k}} \delta\, s_{i,j_2} + \delta\, s_{k,j_2} + \delta\, s_{j_2,j_2} \\
&= \delta \cdot \sum_{i=1}^{N} s_{i,j_2} \geq 0 .
\end{aligned}$$

Die Wahl von j_2 hängt dabei nur von der Vorzeichenkonfiguration

$$(\operatorname{sign}(s_{ij}))_{i,j=1,\dots,N}$$

ab, und die ist für alle $B \in \mathbb{B}_M$ und alle $h \in (0,h_o]$ dieselbe. Damit ist auch (6.1.9(b)) gezeigt.

##

Die Kombination der Lemmata 6.1.5 und 6.1.8 liefert eine hinreichende Bedingung für die starke diskrete Inversmonotonie des nichtlinearen Operators A auf beschränkten Teilmengen von $H^1(\Omega)$.

Satz 6.1.9

A erfülle (A1+), (A2), (A3+), $(T_h)_h$ genüge der Inversenbedingung (4.2.4) und der Winkelbedingung (6.1.4). Außerdem sei D eine beschränkte, konvexe Teilmenge von $H^1(\Omega)$.

Dann ist A asymptotisch stark diskret inversmonoton auf D .

Beweis:

Für $u \in H^1(\Omega)$ ist

$$A'(u) : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))' ,$$

$$\langle A'(u)v,w\rangle = \int_\Omega \{\alpha(x)\nabla v\cdot\nabla w + \gamma(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v\, w + \beta(x,u,\nabla u)vw\}\, dx .$$

Im Beweis von Satz 3.2.4 sahen wir, daß die Nemyzki-Operatoren

$$H^1(\Omega) \to L^2_{2p/(p-2)}(\Omega) , \quad u \mapsto \gamma(\cdot,u,\nabla u) ,$$

$$H^1(\Omega) \to L_{p/(p-2)}(\Omega) , \quad u \mapsto \beta(\cdot,u,\nabla u) ,$$

beschränkte Abbildungen sind. Daher liegen für genügend großes $M \geq 0$ alle Linearisierungen $A'(u)$, $u \in D$, in der Klasse $\mathbb{B}_M$,

$$\exists\, M \geq 0 \ \forall\, u \in D : A'(u) \in \mathbb{B}_M .$$

Lemma 6.1.8 liefert jetzt gerade die Voraussetzungen von Lemma 6.1.5. Darin wird die asymptotische starke diskrete Inversmonotonie von A auf D gezeigt.

##

Bemerkung 6.1.10

Für $\alpha(x) := 1$, $b(x,z,\zeta) := \beta z$ mit $\beta < 0$ ist

$$m_\circ = 1 , \ \mu_1 = 0 , \ \mu_2 = \beta$$

und klassisch

$$Au = -\Delta u + \beta u .$$

Sei P_i ein innerer Knoten der Triangulierung T_h, dem kein Randknoten von T_h benachbart ist. Dann ist

$$1_h = 1 \quad \text{auf } \operatorname{supp}(\lambda_i) ,$$

$$\langle A\, 1_h, \lambda_i \rangle = \int_\Omega \{\beta \lambda_i\}\, dx < 0 .$$

Die Bedingung (6.1.7(a)) in der Definition der starken diskreten Inversmonotonie lautet für diesen Differentialoperator

$$\forall\, i \in \{1,\ldots,N\} : \langle A\, 1_h, \lambda_i \rangle \geq 0$$

und ist, falls innere Knoten ohne Randknoten als Nachbarn existieren, verletzt.

Die Voraussetzungen (A3+) sind also scharf.

#

6.2 Abschätzung des L_∞ - Fehlers

Für Hindernisprobleme mit linearen Operatoren versuchen MOSCO [72] und NATTERER [75] $O(h^2)$ - Fehlerabschätzungen in der L_2 - Norm zu gewinnen. Dabei machen sie Gebrauch von starken Regularitätsaussagen, welche bisher nur für eindimensionale Hindernisprobleme bekannt sind.

Einen erfolgversprechenderen Zugang zu Fehlerabschätzungen in schwächeren Normen eröffnen die Methoden von NITSCHE [76] und BAIOCCHI [4], mit denen $O(h^2)$ - bzw. $O(h^{2-\varepsilon})$ - Abschätzungen in der L_∞ - Norm gezeigt werden.

Wir bauen hier auf der Arbeit von BAIOCCHI [4] auf und verwenden die starke diskrete Inversmonotonie von Abschnitt 6.1 um die Lösung eines Hindernisproblems nach oben und nach unten durch die Lösungen geeigneter nichtlinearer Randwertprobleme (ohne Hindernisbedingung) abzuschätzen. Der Fehler des Ritz-Galerkin-Verfahrens für Hindernisprobleme kann so durch den Fehler bei der Lösung eines verwandten Randwertproblems abgeschätzt werden. L_∞ - Fehlerabschätzungen für solche Randwertprobleme sind aber bekannt (siehe z.B. [41]). Die hier verwendete Methode kommt ohne die bei L_2 - Abschätzungen benötigten starken Regularitätsaussagen aus.

Das Grundgebiet Ω sei wieder durch reguläre Familien $(T_h)_h$ und $(\tilde{T}_h)_h$ von Triangulierungen, die der Inversenbedingung (4.2.4) genügen, approximiert. $A : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))'$ sei ein auf beschränkten Teilmengen von $H^1(\Omega)$ asymptotisch stark diskret inversmonotoner Operator.

Die Lösung u^* des Hindernisproblems ist gegeben durch die Variationsungleichung

$$u^* \in \mathbb{K} \quad \forall\, v \in \mathbb{K} : \langle Au^*, v-u^* \rangle \geq 0 \ ,$$

$$\mathbb{K} := \{ v \in H^1(\Omega) \mid v \geq \chi \text{ f.ü. auf } \Omega \ , \ v|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega} \} \ .$$

Wir stellen hier die folgenden Glattheitsvoraussetzungen:

(6.2.1) $\exists\, q \in (2,\infty] : u^*,\chi \in W_q^2(\Omega)\ ,\quad Au^* \in L_2(\Omega)\ .$

Es existiert dann eine Fortsetzung $\tilde{u} \in H^2(\mathbb{R}^2)$ von u^* .

Die Lösung u_h^* des diskretisierten Hindernisproblems ist gegeben als Lösung der diskreten Variationsungleichung

$$u_h^* \in \mathbb{K}_h \quad \forall\, v_h \in \mathbb{K}_h : \langle Au_h^*, v_h - u_h^* \rangle \geq 0\ ,$$

$$\mathbb{K}_h := \{v_h \in S_h(\tilde{\Omega}_h) \mid \ v_h \geq \P_h\chi \text{ auf } \Omega_h\ ,\ v_h = \P_h\tilde{u} \text{ auf } \tilde{\Omega}_h \setminus \Omega_h\}.$$

Die Lösungen u^* bzw. u_h^* lassen sich auch durch Komplementaritätssysteme charakterisieren. Für u^* gilt nach Lemma 2.2.1

(6.2.2)
$$Au^* \geq 0\ ,\ u^* \geq \chi \text{ f.ü. auf } \Omega\ ,$$
$$Au^* = 0 \text{ auf } \Omega^+ := \{x \in \Omega \mid \ u^*(x) > \chi(x)\}\ .$$

Ganz analog gilt für u_h^* ein diskretes Komplementaritätssystem [1)]

(6.2.3) $\forall\, i \in \{1,\ldots,N\}$:

$$\langle Au_h^*, \lambda_i \rangle \geq 0\ ,\ u_h^*(P_i) \geq \chi(P_i)\ ,$$
$$\langle Au_h^*, \lambda_i \rangle = 0\ ,\ \text{falls}\ \ u_h^*(P_i) > \chi(P_i)\ .$$

Wir untersuchen nun, inwieweit die kontinuierliche Lösung u^* dem diskreten Komplementaritätssystem (6.2.3) genügt. Wegen $Au^* \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$ und $u^* \geq \chi$ gilt zwar noch

(6.2.4) $\forall\, i \in \{1,\ldots,N\}$:

$$\langle Au^*, \lambda_i \rangle \geq 0\ ,\ u^*(P_i) \geq \chi(P_i)\ ,$$

aber im allgemeinen gilt nicht mehr

$$\langle Au^*, \lambda_i \rangle = 0\ ,\ \text{falls}\ \ u^*(P_i) > \chi(P_i)\ .$$

Wir zeigen jetzt, daß unter stärkeren Voraussetzungen als $u^*(P_i) > \chi(P_i)$ doch $\langle Au^*, \lambda_i \rangle = 0$ gilt. Dazu beweisen wir zuerst ein technisches Lemma.

---

1) Vgl. [57; Th. I.5.5, S.17].

Lemma 6.2.1 [1)]

Sei $K \in \mathbf{T}_h$.

Dann gilt:

$$\forall q \in (2,\infty] \ \exists c(q) \geq 0 \ \forall v \in W_q^2(\Omega) :$$
$$v \geq 0 \ \wedge \ \exists x_o \in K : v(x_o) > c(q)\, h^{2-2/q} \|v\|_{2,q} \ \Rightarrow$$
$$\forall x \in K : v(x) > 0 \ .$$

Beweis:

(i) Für $v \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$, $\lambda \in (0,1]$, gilt:

$$\exists x_o \in K : v(x_o) = 0 \ \Rightarrow \ \forall x \in K : |v(x)| \leq [v]_{0,\lambda}\, h^{\lambda} \ .$$

Dabei sei $[\cdot]_{0,\lambda}$ die Hölder-Seminorm

$$[v]_{0,\lambda} := \sup \{ \frac{|v(y)-v(z)|}{|y-z|^{\lambda}} \mid y,z \in \Omega \ , \ y \neq z \}, \ v \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}),$$

und analog

$$[v]_{1,\lambda} := \sup \{ \frac{|\nabla v(y) - \nabla v(z)|}{|y - z|^{\lambda}} \mid y,z \in \Omega \ , \ y \neq z \} \ ,$$

$v \in C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$.

Es gilt nämlich: $\forall x \in K, \ x \neq x_o$:

$$|v(x)| = |v(x)-v(x_o)| = \frac{|v(x)-v(x_o)|}{|x-x_o|^{\lambda}} |x-x_o|^{\lambda} \leq [v]_{0,\lambda}\, h^{\lambda} \ .$$

(ii) Für $v \in C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$, $\lambda \in (0,1]$, gilt:

$$v \geq 0 \ \wedge \ \exists x_o \in K : v(x_o) = 0 \ \Rightarrow$$
$$\forall x \in K : |v(x)| \leq 2\, [v]_{1,\lambda}\, h^{1+\lambda} \ .$$

Aus $v \geq 0$ und $v(x_o) = 0$ folgt $\nabla v(x_o) = 0$. Anwendung von (i) auf $\partial_i v$, $i = 1,2$, liefert

$$\forall \xi \in K : |\partial_i v(\xi)| \leq [\partial_i v]_{0,\lambda}\, h^{\lambda} \leq [v]_{1,\lambda}\, h^{\lambda}$$

und damit auch

$$\forall \xi \in K : |\nabla v(\xi)| \leq 2 \ [v]_{1,\lambda}\, h^{\lambda} \ .$$

---

1) Siehe [4], [76].

Dann gilt $\forall x \in K$:

$$|v(x)| = |v(x)-v(x_o)| \leq \int_0^1 |\nabla v(x_o + t(x-x_o))\cdot(x-x_o)|\,dt$$

$$\leq 2\,[v]_{1,\lambda}\,h^{1+\lambda} .$$

(iii) Für $q \in (2,\infty)$ besteht die Sobolewsche Einbettung $W_q^2(\Omega) \subset C^{1,1-2/q}(\overline{\Omega})$, also gilt

$$\exists\, \tilde{c}(q)\ \forall v \in W_q^2(\Omega) : [v]_{1,1-2/q} \leq \tilde{c}(q)\,\|v\|_{2,q} .$$

Aus (ii) folgt dann für $v \in W_q^2(\Omega)$:

$$v \geq 0 \wedge \exists\, x_o \in K : v(x_o) = 0 \Rightarrow \forall x \in K :$$

$$|v(x)| \leq 2\,[v]_{1,1-2/q}\,h^{2-2/q} \leq c(q)\,\|v\|_{2,q}\,h^{2-2/q}$$

mit $c(q) := 2\cdot\tilde{c}(q)$.

Diese Aussage ist äquivalent zur Behauptung des Lemmas (für $q < \infty$).

(iv) Für $q = \infty$ ist $W_\infty^2(\Omega) = C^{1,1}(\overline{\Omega})$ und wir erhalten aus (ii) mit $\lambda := 1$ die Behauptung.

##

Ist jetzt nicht nur $u^*(P_i) > \chi(P_i)$, sondern sogar

$$(u^*-\chi)(P_i) > c(q)\,\|u^*-\chi\|_{2,q}\,h^{2-2/q} ,$$

dann gilt nach dem eben bewiesenen Lemma $u^*-\chi > 0$ auf allen Dreiecken der Triangulierung T_h, die P_i enthalten, also $u^*-\chi > 0$ auf $\mathrm{supp}(\lambda_i)$. Deswegen ist $\mathrm{supp}(\lambda_i) \subset \Omega^+$ und damit auch $Au^* = 0$ auf $\mathrm{supp}(\lambda_i)$. Also ist

$$\langle Au^*, \lambda_i \rangle = \int_\Omega \{Au^*(x)\lambda_i(x)\}\,dx = 0 .$$

Wir fassen zusammen:

(6.2.5) $\forall i \in \{1,\ldots,N\}$:

$$\langle Au^*, \lambda_i \rangle = 0 \text{ , falls } (u^*-\chi)(P_i) > c(q)\,\|u^*-\chi\|_{2,q}\,h^{2-\frac{2}{q}} .$$

Wir vergleichen jetzt die diskrete Lösung u_h^* mit der sogenannten elliptischen Projektion w_h^* von u^*, die durch die Gleichungen

$$w_h^* \in S_h' \;\forall\, v_h \in S_h' : \langle Aw_h^*, v_h - w_h^* \rangle = \langle Au^*, v_h - w_h^* \rangle ,$$

oder dazu äquivalent durch

(6.2.6) $$w_h^* \in S_h' \;\forall\, i \in \{1,\dots,N\} : \langle Aw_h^*, \lambda_i \rangle = \langle Au^*, \lambda_i \rangle .$$

definiert ist. Dabei sei (vgl. (4.2.6))

$$S_h' = \{ v_h \in S_h(\tilde{\Omega}_h) \mid v_h = \Pi_h \tilde{u} \text{ auf } \tilde{\Omega}_h \setminus \Omega_h \} .$$

Die elliptische Projektion ist die Ritz-Galerkin-Näherung an die schwache Lösung u^* des Randwertproblems

$$Au^* = f \text{ auf } \Omega \text{ mit } f := Au^* ,$$

$$u^*|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega} .$$

Die Differenz $u^* - w_h^*$ stellt also den Fehler der numerischen Lösung eines nichtlinearen elliptischen Randwertproblems (ohne Hindernisbedingung) dar.

Im folgenden verwenden wir die Abkürzungen

(6.2.7) $$v_h^* := \Pi_h \tilde{u} - w_h^* ,$$

(6.2.8) $$C := c(q)\, \| u^* - \chi \|_{2,q} .$$

In Satz 6.1.9 wurden hinreichende Bedingungen für die asymptotische starke diskrete Inversmonotonie von A auf beschränkten Teilmengen von $H^1(\Omega)$ angegeben. Um dieses Ergebnis hier anwenden zu können, müssen wir zuerst die $H^1(\Omega)$ - Beschränktheit derjenigen Funktionen nachweisen, für die wir die diskrete Inversmonotonie ausnutzen werden.

Lemma 6.2.2

$$\{ u_h^*,\ w_h^*,\ \| v_h^* \|_{0,\infty,\Omega_h} 1_h,\ (\| v_h^* \|_{0,\infty,\Omega_h} + C\, h^{2-\frac{2}{q}}) 1_h \mid h > 0 \}$$

ist eine beschränkte Teilmenge von $H^1(\Omega)$.

Beweis:

(i) Wir zeigen zuerst: $\exists\, R \geq 0 \;\; \forall\, h : \; \|u_h^*\|_{1} \leq R$.

Es ist

$$\|u_h^*\|_{1,\Omega} \leq \|u_h^*\|_{1,\Omega_h} + \|u_h^*\|_{1,\Omega \setminus \Omega_h}$$
$$\leq \|u_h^*\|_{1,\Omega_h} + \|\P_h \tilde{u}\|_{1,\tilde{\Omega}_h} .$$

Nach Satz 5.1 ist

$$\|u^* - u_h^*\|_{1,\Omega_h} = O(h) , \; h \to 0 ,$$

und daher $\|u_h^*\|_{1,\Omega_h}$ beschränkt. Wegen (4.2.2) ist

$$\|\tilde{u} - \P_h \tilde{u}\|_{1,\tilde{\Omega}_h} \leq c_1 h \, \|\tilde{u}\|_{2,\mathbb{R}^2} \leq c_2 h \, \|u^*\|_{2,\Omega} \to 0 , \; h \to 0 ,$$

und deswegen $\|\P_h \tilde{u}\|_{1,\tilde{\Omega}_h}$ beschränkt.

(ii) Als nächstes zeigen wir: $\exists\, R \geq 0 \;\; \forall\, h : \; \|w_h^*\|_{1} \leq R$.

Satz 5.1 liefert mit $\chi' := - \|u^*\|_{0,\infty} - 1$ auch Energienormabschätzungen des Ritz-Galerkin-Verfahrens für nichtlineare Randwertprobleme. Für die diskreten Lösungen $u_h^*(\chi')$ gilt nämlich

$$\|u^*(\chi') - u_h^*(\chi')\|_{1,\Omega_h} = O(h) , \; h \to 0 ,$$

woraus mit Hilfe der Inversenungleichungen (4.2.5)

$$\|u^*(\chi') - u_h^*(\chi')\|_{0,\infty,\Omega_h} \to 0 , \; h \to 0 ,$$

folgt. Die diskrete Hindernisbedingung $u_h^*(\chi') \geq \P_h \chi' = \chi'$ wird für genügend kleine h also nicht aktiv. Deswegen ist $u_h^*(\chi') = w_h^*$. Damit gilt

$$\|u^* - w_h^*\|_{1,\Omega_h} = O(h) , \; h \to 0 .$$

Wie in (i) folgt daraus die Beschränktheit von $\|w_h^*\|_{1}$.

(iii) Es gilt: $\exists\, c \geq 0 \;\; \forall\, h : \; \|1_h\|_{1} \leq c \, h^{-1/2}$.

Ist $K \in \mathbf{T}_h$ ein Dreieck, das genau einen Randknoten $P_i \in \partial\Omega_h$ besitzt, dann gilt $1_h = 1 - \lambda_i$ auf K und wegen Lemma 6.1.7

$$|\nabla 1_h| = |\nabla \lambda_i| \leq \sigma^2 \nu \, h^{-1} \quad \text{auf } K \, .$$

Für Dreiecke $K \in \mathbf{T}_h$ mit zwei Randknoten $P_i, P_j \in \partial\Omega_h$ ist $1_h = 1 - \lambda_i - \lambda_j$ auf K und damit

$$|\nabla 1_h| = |\nabla \lambda_i + \nabla \lambda_j| \leq 2\sigma^2 \nu \, h^{-1} \quad \text{auf } K \, .$$

Für Dreiecke $K \in \mathbf{T}_h$ ohne Randknoten ist

$$|\nabla 1_h| = 0 \quad \text{auf } K \, .$$

Außerdem ist

$$\operatorname{supp}(|\nabla 1_h|) \subset \{x \in \Omega_h \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega_h) \leq h\} \, .$$

Durch Integration folgt dann

$$|1_h|_1^2 = |1_h|_{1,\Omega_h}^2 \leq 4\sigma^4 \nu^2 \, h^{-2} \cdot \operatorname{meas}_1(\partial\Omega_h) \cdot h \, .$$

Wegen der Konvexität von Ω ist

$$\operatorname{meas}_1(\partial\Omega_h) \leq \operatorname{meas}_1(\partial\Omega)$$

und damit

$$|1_h|_1 \leq 2\sigma^2 \nu \cdot \operatorname{meas}_1(\partial\Omega) \cdot h^{-1/2} \, .$$

Wegen

$$\|1_h\|_{0,\Omega} \leq (\operatorname{meas}_2(\Omega))^{1/2} \, \|1_h\|_{0,\infty,\Omega} \leq (\operatorname{meas}_2(\Omega))^{1/2}$$

gilt dann

$$\|1_h\|_1 = O(h^{-1/2}) \, , \quad h \to 0 \, .$$

(iv) Es gilt: $\exists \, c \geq 0 \;\; \forall h : \; \|v_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} \leq c \, h^{1/2} \, .$

Für alle $\varepsilon > 0$ ist wegen der Einbettung $W_{2+\varepsilon}^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ und der Inversenungleichungen (4.2.5)

$$\begin{aligned} \|v_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} &= \|v_h^*\|_{0,\infty,\Omega} \leq c_\varepsilon \, \|v_h^*\|_{1,2+\varepsilon,\Omega} \\ &= c_\varepsilon \, \|v_h^*\|_{1,2+\varepsilon,\Omega_h} \leq c_\varepsilon' \, h^{-\varepsilon/2} \, \|v_h^*\|_{1,\Omega_h} \\ &\leq c_\varepsilon' \, h^{-\varepsilon/2} \, (\, \|u^* - \P_h u^*\|_{1,\Omega_h} + \|u^* - w_h^*\|_{1,\Omega_h} \,) \, . \end{aligned}$$

Mit $\varepsilon := \min(q-2,1)$ ergibt sich daraus

$$\|v_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} = O(h^{1/2}) \ , \ h \to 0 \ .$$

(v) Die Kombination von (iii) mit (iv) liefert schließlich

$$\| \|v_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} 1_h \|_1 = \|v_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} \|1_h\|_1 = O(1) \ ,$$
$$\|C\, h^{2-2/q} 1_h\|_1 = C\, h^{2-2/q} \|1_h\|_1 = O(1) \ .$$

##

Mit Hilfe der starken diskreten Inversmonotonie von A auf Kugeln $D := \{v \in H^1(\Omega) \mid \|v\|_1 < R\}$ in $H^1(\Omega)$ können wir jetzt den Abstand $u_h^* - w_h^*$ abschätzen.

Lemma 6.2.3

Es gibt ein $h_o > 0$, so daß für alle $h \in (0,h_o]$ auf Ω_h gilt:

$$(6.2.9) \quad -\|v_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} - C\, h^{2-2/q} \le u_h^* - w_h^* \le \|v_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} \ .$$

Beweis:

Der Beweis gliedert sich in zwei Teile, den ersten ((i)) für die rechte Ungleichung in (6.2.9), den zweiten ((ii)) für die linke. Beide Teile folgen demselben Muster: Unter der Annahme, daß die betreffende Ungleichung nicht gilt, wird zuerst eine Gleichung im i-ten Knoten hergeleitet (in (i) für u_h^* , in (ii) für u^*), danach wird daraus unter Zuhilfenahme der Komplementaritätssysteme ((6.2.2) für (i), (6.2.3) für (ii)) ein Widerspruch zur starken diskreten Inversmonotonie abgeleitet.

(i) $u_h^* \le w_h^* + \|v_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} 1_h =: s_h$.

Angenommen es ist $u_h^* \not\le s_h$.
Wegen Lemma 6.2.2 und Satz 6.1.9 gilt dann

$$\exists\, h_o > 0 \;\forall\, h \in (0,h_o] \;\exists\, i \in \{1,\dots,N\} :$$

$$u_h^*(P_i) > s_h(P_i) \;\wedge\; \langle Au_h^*,\lambda_i\rangle > \langle As_h,\lambda_i\rangle \;.$$

Zunächst ist

$$u_h^*(P_i) > s_h(P_i) = w_h^*(P_i) + \|v_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h}$$

$$= \P_h\tilde{u}(P_i) + w_h^*(P_i) - \P_h\tilde{u}(P_i) + \|v_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h}$$

$$= \P_h\tilde{u}(P_i) - v_h^*(P_i) + \|v_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h}$$

$$\geq \P_h\tilde{u}(P_i) = u^*(P_i) \geq \chi(P_i)$$

und wegen (6.2.3) gilt dann

$$\langle Au_h^*,\lambda_i\rangle = 0 \;.$$

Für $c := \|v_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h}$ gilt (wiederum wegen Lemma 6.2.2, Satz 6.1.9 und mit (6.2.6), (6.2.4)):

$$\langle As_h,\lambda_i\rangle - \langle Au_h^*,\lambda_i\rangle = \langle A(w_h^* + c\,1_h),\lambda_i\rangle \geq \langle Aw_h^*,\lambda_i\rangle$$

$$= \langle Au^*,\lambda_i\rangle \geq 0 \;.$$

Das ist der gewünschte Widerspruch.

(ii) $w_h^* \leq u_h^* + (\|v_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} + C\,h^{2-2/q})\,1_h =: s_h \;.$

Angenommen es ist $w_h^* \not\leq s_h$.
Dann gilt wie oben

$$\forall\, h \in (0,h_o] \;\exists\, i \in \{1,\dots,N\} :$$

$$w_h^*(P_i) > s_h(P_i) \;\wedge\; \langle Aw_h^*,\lambda_i\rangle > \langle As_h,\lambda_i\rangle \;.$$

Zunächst ist hier

$$u^*(P_i) = \P_h\tilde{u}(P_i) = w_h^*(P_i) + (\P_h\tilde{u}(P_i) - w_h^*(P_i))$$

$$> s_h(P_i) + v_h^*(P_i)$$

$$= u_h^*(P_i) + \|v_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} + v_h^*(P_i) + C\,h^{2-2/q}$$

$$\geq \chi(P_i) + C\,h^{2-2/q}$$

und wegen (6.2.5) gilt dann

$$\langle Au^*,\lambda_i\rangle = 0 \;.$$

Für $c := \|v_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} + C\,h^{2-2/q}$ gilt hier wegen Lemma 6.2.2, Satz 6.1.9 und wegen (6.2.6), (6.2.3):

$$\langle As_h, \lambda_i\rangle - \langle Aw_h^*, \lambda_i\rangle = \langle A(u_h^* + c\,1_h), \lambda_i\rangle \geq \langle Au_h^*, \lambda_i\rangle \geq 0 \ .$$

Das ist der gewünschte Widerspruch.

##

Aus diesem Lemma folgt jetzt unmittelbar eine L_∞-Fehlerabschätzung des Ritz-Galerkin-Verfahrens für Hindernisprobleme.

Satz 6.2.4

Es gilt: $\exists\, h_o > 0 \ \forall\, h \in (0,h_o]$:

$$\|u^*-u_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} \leq 2\,\|u^*-w_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} + \|u^*-\P_h u^*\|_{0,\infty,\Omega_h} + c(q)\,\|u^*-\chi\|_{2,q}\,h^{2-2/q} \ . \tag{6.2.10}$$

Bemerkung 6.2.5

Der Fehler $u^*-u_h^*$ der Näherungslösung des Hindernisproblems wird in (6.2.10) durch den Fehler $u^*-w_h^*$ des Ritz-Galerkin-Verfahrens für ein nichtlineares Randwertproblem, durch den Interpolationsfehler $u^*-\P_h u^*$ und durch einen $O(h^{2-2/q})$-Zusatzterm abgeschätzt.

#

Beweis von Satz 6.2.4:

Zunächst ist

$$\|u^*-u_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} \leq \|u^*-w_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} + \|w_h^*-u_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} \ .$$

Mit Lemma 6.2.3 läßt sich der zweite Summand abschätzen. Für $h \in (0,h_o]$ gilt demnach auf Ω_h

$$w_h^*-u_h^* \leq \|v_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} + C\,h^{2-2/q} \ ,$$

$$u_h^*-w_h^* \leq \|v_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} \leq \|v^*\|_{0,\infty,\Omega_h} + C\,h^{2-2/q} \ ,$$

zusammen also

$$\|w_h^*-u_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} \leq \|v_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} + C\,h^{2-2/q}$$

$$= \|\P_h u^*-w_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} + C\,h^{2-2/q}$$

$$\leq \|u^*-\P_h u^*\|_{0,\infty,\Omega_h} + \|u^*-w_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} + C\,h^{2-2/q}\ .$$

Insgesamt ergibt sich

$$\|u^*-u_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} \leq 2\,\|u^*-w_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} + \|u^*-\P_h u^*\|_{0,\infty,\Omega_h}$$
$$+ c(q)\,\|u^*-\chi\|_{2,q}\,h^{2-2/q}\ .$$

##

Für Abschätzungen des Fehlers $u^*-w_h^*$ nichtlinearer Randwertprobleme verweisen wir auf [41], wo $(h^2|\ln h|^{2/5})$ - Abschätzungen in der L_∞ - Norm angegeben werden. Daraus ergibt sich unmittelbar das

Korollar 6.2.6

Es seien (A1+), (A2), (A3+) erfüllt und zusätzlich gelte $b \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$, $\alpha \in C^2(\overline{\Omega})$.

Ω besitze einen C^3 - Rand. $(T_h)_h$, $(\tilde{T}_h)_h$ seien reguläre Familien von Triangulierungen, die der Winkelbedingung (6.1.4) und der Inversenbedingung (4.2.4) genügen.

Außerdem gelte $u^*,\chi \in W_\infty^2(\Omega)$, $g \in C^3(\overline{\Omega})$.

Dann gilt die quasioptimale Fehlerabschätzung

$$\|u^*-u_h^*\|_{0,\infty,\Omega_h} = O(h^2|\ln h|^{2/5})\ .$$

##

Für eine Klasse fastlinearer Differentialoperatoren wollen wir hier noch zeigen, wie sich L_∞ - Abschätzungen mit Energiemethoden aus bekannten L_p - Abschätzungen für den Laplace-Operator gewinnen lassen.

Dazu betrachten wir ein konvexes Polygongebiet Ω und eine reguläre Familie $(T_h)_h$ von Triangulierungen, die der Inversenbedingung (4.2.4) und der Winkelbedingung (6.1.4) genügt. Außerdem sei $\forall\, h : \Omega_h = \Omega$.

Der Einfachheit halber wählen wir jetzt homogene Randbedingungen, $g = 0$.

Wir betrachten fastlineare Operatoren

$$A : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))' ,$$

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \{\nabla u \cdot \nabla v + b(x,u)\, v - f\, v\}\, dx$$

$$(\text{klassisch } \quad Au = -\Delta u + b(x,u) - f) ,$$

die den Bedingungen (A1+), (A2), (A3+) genügen, d.h.

$$b : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} , \quad (x,z) \mapsto b(x,z) ,$$

sei stetig und nach z stetig differenzierbar; $\beta := \frac{\partial}{\partial z} b$. Von b wird in (A2) und (A3+) bezüglich z monotones Verhalten und polynomiales Wachstum gefordert,

$$\exists\, c \geq 0\ \exists\, p \in [2,\infty)\ \ \forall x \in \Omega\ \ \forall z \in \mathbb{R} :$$

$$|b(x,0)| \leq c \quad 0 \leq \beta(x,z) \leq c\,(1 + |z|^{p-2}) .$$

Satz 6.2.7

Es seien die obigen Voraussetzungen erfüllt und es gebe ein $q \in (2,\infty)$ mit

$$u^*, \chi \in W_q^2(\Omega) .$$

Dann gilt

$$\|u^* - u_h^*\|_{0,\infty} = O(h^{2-2/q}) .$$

Beweis:

(i) Wir wenden Satz 6.2.4 an:

Wegen $u^* \in W_q^2(\Omega)$ ist $u^* \in C(\overline{\Omega})$ und daher

$$\varphi := Au^* = -\Delta u^* + b(\cdot, u^*) - f \in L_q(\Omega) .$$

Satz 6.2.4 ist anwendbar und liefert

$$\|u^*-u_h^*\|_{0,\infty} \le 2\,\|u^*-w_h^*\|_{0,\infty} + \|u^*-\P_h u^*\|_{0,\infty}$$
$$+ c(q)\,\|u^*-\chi\|_{2,q}\,h^{2-2/q}$$
$$\le 2\,\|u^*-w_h^*\|_{0,\infty} + c\,h^{2-2/q} .$$

(ii) Wir führen jetzt die Fehlerabschätzung für fastlineare Randwertprobleme auf eine für den Laplace-Operator zurück. Dazu definieren wir den Operator

$$B : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))' , \quad Bv := Av - \varphi ,$$

und einen benachbarten Operator mit eingefrorenen Koeffizienten

$$\tilde{B} : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))' ,$$

$$\langle \tilde{B}v, w\rangle := \int_\Omega \{\nabla v\cdot\nabla w + b(x,u^*)w - f\,w - \varphi\,w\}\,dx$$
$$= \int_\Omega \{\nabla v\cdot\nabla w - \tilde{\varphi}\,w\}\,dx ,$$

wobei $\tilde{\varphi} := -b(\cdot,u^*) + f + \varphi \in L_q(\Omega)$. Klassisch entspricht $\tilde{B}$ der Operator $\tilde{B}v = -\Delta v - \tilde{\varphi}$.

Aufgrund der Wachstumsbedingungen an β ist

$$\forall\, R \ge 0\ \exists\, M_R \ge 0\ \forall x\in\Omega\ \forall z\in\mathbb{R}: |z| \le R \Rightarrow |\beta(x,z)| \le M_R$$

und daher

$$\forall\, R \ge 0\ \exists\, M_R \ge 0\ \forall x\in\Omega\ \forall z^1,z^2\in\mathbb{R}: |z^1| \le R \wedge |z^2| \le R$$
$$\Rightarrow |b(x,z^1) - b(x,z^2)| = \Big|\int_0^1 \{\beta(x,z^2 + t(z^1-z^2))(z^1-z^2)\}\,dt\Big|$$
$$\le M_R |z^1-z^2| ,$$

d.h. b genügt einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich z . Mit $q' := q/(q-1)$ gilt dann wegen $q' \le 2$:

$$\forall\, v\in W^1_\infty(\Omega)\ \forall\, w\in W^1_{q'}(\Omega) : \|v\|_{0,\infty} \le R \Rightarrow$$
$$(6.2.11)\quad |\langle(\tilde{B}-B)v,w\rangle| = \Big|\int_\Omega \{[b(x,u^*) - b(x,v)]w\}\,dx\Big|$$
$$\le M_R \int_\Omega \{|u^*-v|\,|w|\}\,dx \le M_R\,\|u^*-v\|_{0,q}\,\|w\|_{0,q'}$$
$$\le M_R\,c\,\|u^*-v\|_{0,q}\,\|w\|_1 .$$

u^* löst jetzt nicht nur das ursprüngliche Hindernisproblem, sondern auch das fastlineare Randwertproblem

$$u^* \in H_o^1(\Omega) \quad \forall\, v \in H_o^1(\Omega) \;:\; \langle Bu^*, v\rangle = 0$$

und ebenfalls das benachbarte lineare Randwertproblem

$$u^* \in H_o^1(\Omega) \quad \forall\, v \in H_o^1(\Omega) \;:\; \langle \tilde{B}u^*, v\rangle = 0 \;.$$

Seien w_h^* und $\tilde{w}_h$ die zugehörigen Ritz-Galerkin-Lösungen, also

$$(6.2.12)\quad w_h^* \in S_{h,0} \quad \forall\, v_h \in S_{h,0} \;:\; \langle Bw_h^*, v_h\rangle = 0 \;,$$

$$(6.2.13)\quad \tilde{w}_h \in S_{h,0} \quad \forall\, v_h \in S_{h,0} \;:\; \langle \tilde{B}\tilde{w}_h, v_h\rangle = 0 \;.$$

Wegen der starken Monotonie von B auf $H_o^1(\Omega)$ und wegen (6.2.12), (6.2.13) ist

$$\begin{aligned} m\,\|w_h^*-\tilde{w}_h\|_1^2 &\le \langle Bw_h^*-B\tilde{w}_h, w_h^*-\tilde{w}_h\rangle \\ &= \langle Bw_h^*, w_h^*-\tilde{w}_h\rangle + \langle \tilde{B}\tilde{w}_h, w_h^*-\tilde{w}_h\rangle - \langle B\tilde{w}_h, w_h^*-\tilde{w}_h\rangle \\ &= \langle (\tilde{B}-B)\tilde{w}_h, w_h^*-\tilde{w}_h\rangle \;. \end{aligned}$$

Aus Korollar 5.2 wissen wir

$$\|u^*-\tilde{w}_h\|_1 = O(h) \;,\; h \to 0 \;,$$

woraus mit Hilfe der Inversenungleichungen (4.2.5)

$$\|u^*-\tilde{w}_h\|_{0,\infty} \to 0 \;,\; h \to 0 \;,$$

folgt. Insbesondere sind die $\tilde{w}_h$, $h > 0$, in L_∞ beschränkt,

$$\exists\, R \ge 0 \quad \forall\, h \;:\; \|\tilde{w}_h\|_{0,\infty} \le R \;.$$

Die Abschätzung (6.2.11) ist daher anwendbar und ergibt

$$\|w_h^*-\tilde{w}_h\|_{0,q} \le c_q \|w_h^*-\tilde{w}_h\|_1 \le \frac{M_R c c_q}{m} \|u^*-\tilde{w}_h\|_{0,q}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \|u^*-w_h^*\|_{0,q} &\le \|u^*-\tilde{w}_h\|_{0,q} + \|\tilde{w}_h-w_h^*\|_{0,q} \\ &\le \left(1+\frac{M_R c c_q}{m}\right) \|u^*-\tilde{w}_h\|_{0,q} \;. \end{aligned}$$

Aus [86] entnehmen wir eine L_q-Abschätzung für das lineare Dirichletproblem,

$$\|u^*-\tilde{w}_h\|_{0,q} \le c_q' h^2 \|u^*\|_{2,q} \;,$$

woraus mit Hilfe der Inversenungleichungen (4.2.5)

$$\begin{aligned}
\|u^*-\tilde{w}_h\|_{0,\infty} &\leq \|u^*-\P_h u^*\|_{0,\infty} + \|\P_h u^*-\tilde{w}_h\|_{0,\infty} \\
&\leq \|u^*-\P_h u^*\|_{0,\infty} + c\, h^{-2/q} \|\P_h u^*-\tilde{w}_h\|_{0,q} \\
&\leq \|u^*-\P_h u^*\|_{0,\infty} + c\, h^{-2/q} (\|u^*-\P_h u^*\|_{0,q} + \|u^*-\tilde{w}_h\|_{0,q}) \\
&\leq c\, h^{2-2/q} \|u^*\|_{2,q} + c\, h^{-2/q} (c\, h^2 \|u^*\|_{2,q} + c'_q\, h^2 \|u^*\|_{2,q}) \\
&\leq c\, h^{2-2/q} \|u^*\|_{2,q}
\end{aligned}$$

folgt. Insgesamt ergibt sich

$$\|u^*-u_h^*\|_{0,\infty} = O(h^{2-2/q}) \ .$$

##

Bemerkungen 6.2.9

(a) Für $q \in (2,\infty]$, $u^* \in W_q^2(\Omega)$ gilt die folgende Abschätzung des Interpolationsfehlers:

$$\|u^*-\P_h u^*\|_{0,\infty,\Omega_h} = O(h^{2-2/q}) \ .$$

Der zweite Summand der Fehlerabschätzung (6.2.10) hat somit dieselbe Ordnung wie der Zusatzterm $C\, h^{2-2/q}$.

(b) Falls $u^* \in W_\infty^2(\Omega)$ gilt, liefert Korollar 6.2.6 die quasioptimale Abschätzung

$$\|u^*-u_h^*\|_{0,\infty} = O(h^2 |\ln h|^{2/5}) \ .$$

Manchmal tritt in konkreten Aufgaben der Fall

$$\forall\, q < \infty : u^* \in W_q^2(\Omega) \quad \text{und} \quad u^* \notin W_\infty^2(\Omega)$$

auf. Das Korollar 6.2.6 ist dann nicht mehr anwendbar. Für fastlineare Operatoren und polygonale Gebiete Ω wissen wir aus Satz 6.2.7, daß

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \|u^*-u_h^*\|_{0,\infty} = O(h^{2-\varepsilon})$$

gilt, was numerisch kaum von quadratischer Konvergenzordnung unterschieden werden kann.

#

§7. NUMERISCHE BEHANDLUNG VON HINDERNISPROBLEMEN

7.1 Die Lösung von Hindernisproblemen im $\mathbb{R}^n$

Das Ritz-Galerkin-Verfahren approximiert Hindernisprobleme durch diskrete Analoga. Diese diskreten Hindernisprobleme sind - aufgrund der speziellen Struktur der Nebenbedingungen - zu nichtlinearen Komplementaritätssystemen im $\mathbb{R}^n$ äquivalent. Diskrete Hindernisprobleme lassen sich deshalb mit allen Verfahren, die für Komplementaritätssysteme entwickelt wurden, lösen.

Die Diskretisierungen von Hindernisproblemen mit Potentialoperatoren sind darüberhinaus zu konvexen Minimumaufgaben im $\mathbb{R}^n$ äquivalent.

Wir untersuchen hier das Newton-Verfahren und beweisen eine Verallgemeinerung des Konvergenzsatzes von Ostrowski-Kantorowitsch für Variationsungleichungen. Wie bei Gleichungen ergibt sich superlineare bzw. quadratische Konvergenz.

Anschließend zeigen wir, daß die in jedem Newton-Schritt zu lösenden linearen Komplementaritätssysteme die Anwendung des projizierten Gauß-Jacobi- und auch des projizierten Gauß-Seidel-Verfahrens zulassen.

Wir wenden uns jetzt der konkreten numerischen Lösung eines diskreten Hindernisproblems

$$(7.1.1)\quad u_h^* \in \mathbb{K}_h \quad \forall\, v_h \in \mathbb{K}_h : \langle Au_h^*, v_h - u_h^* \rangle \geq 0 \ ,$$

$$(7.1.2)\quad \mathbb{K}_h = \{u_h \in S_h(\Omega_h) \mid \forall\, i \in \{1,\ldots,N\} : u_h(P_i) \geq \chi(P_i) \ ,$$
$$\forall\, i \in \{N+1,\ldots,M\} : u_h(P_i) = g(P_i)\}$$

zu. Mit der Darstellung der Ansatzfunktionen bezüglich der Lagrange-Basis $\{\lambda_i \mid i = 1,\ldots,M\}$ ergibt sich eine äquivalente Variationsungleichung im $\mathbb{R}^M$.

(7.1.3) $U^* \in \mathbf{K}\ \forall\, v \in \mathbf{K} : \langle FU^*, V-U^* \rangle_{\mathbb{R}^M} \geq 0$.

Dabei ist

(7.1.4) $\mathbf{K} := \{U \in \mathbb{R}^M \mid \forall\, i \in \{1,\ldots,N\} : U_i \geq \chi_i := \chi(P_i)$,

$\forall\, i \in \{N+1,\ldots,M\} : U_i = g_i := g(P_i)\}$,

(7.1.5) $F : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$,

$$\langle FU, V \rangle_{\mathbb{R}^M} := \langle A\Big(\sum_{i=1}^{M} U_i \lambda_i\Big), \sum_{j=1}^{M} V_j \lambda_j \rangle_{H^1(\Omega)} .$$

Besitzt der Operator A ein konvexes Potential J, $J' = A$, dann ist (7.1.3) äquivalent zur konvexen Minimumaufgabe

(7.1.6) $U^* \in \mathbf{K}\ \forall\, v \in \mathbf{K} : \Phi(U^*) \leq \Phi(V)$,

wobei

(7.1.7) $\Phi : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$, $\Phi(U) := J\Big(\sum_{i=1}^{M} U_i \lambda_i\Big)$.

Die Variationsungleichung (7.1.3) ist äquivalent zum folgenden nichtlinearen Komplementaritätssystem

(7.1.8) $\forall\, i \in \{1,\ldots,N\} : F_i(U^*) \geq 0$, $U_i^* \geq \chi_i$,

$F_i(U^*)(U_i^* - \chi_i) = 0$,

$\forall\, i \in \{N+1,\ldots,M\} : U_i^* = g_i$.

Alle Verfahren zur Lösung nichtlinearer Komplementaritätssysteme können deshalb zur Lösung des diskreten Hindernisproblems (7.1.1), (7.1.2) herangezogen werden [1].

Wir untersuchen als nächstes die Verallgemeinerung des Newton-Verfahrens auf Variationsungleichungen. Dazu gehen wir von einer abstrakten Variationsungleichung

(7.1.9) $u^* \in \mathbb{K}\ \forall\, v \in \mathbb{K} : \langle Au^*, v-u^* \rangle \geq 0$

aus.

---

1) Zu diesen Verfahren siehe etwa [45], [65], [69], [70], [79], [82], [84], [85].

$\mathbb{K}$ sei eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge eines reflexiven Banachraums X und $A : X \to X'$ ein auf $\mathbb{K}$ stark monotoner Operator mit stetiger Ableitung $A' : X \to L(X,X')$.

Das Newton-Verfahren ersetzt das eigentliche, nichtlineare Problem durch eine Folge von einfacheren, linearisierten Aufgaben. Im Fall einer nichtlinearen Gleichung $Au = 0$ löst man so, ausgehend von einer Startnäherung u^0 , die Folge der linearen Aufgaben:

Finde u^{n+1} so, daß gilt

$$Au^n + A'(u^n)(u^{n+1}-u^n) = 0 \quad , \quad n = 0,1,\ldots \; .$$

Diese Form des Newton-Verfahrens wird seit langem zur Lösung nichtlinearer Operatorgleichungen auf Banachräumen verwendet (siehe etwa [53; S.562ff], [30; S.224ff]). Eine Variante zur Lösung allgemeiner Variationsungleichungen wurde wohl zum ersten Mal von BAKUSHINSKII [7] erwähnt.

Bei Variationsungleichungen treten zwei ganz verschiedene Arten von Nichtlinearitäten auf, zum einen solche des betreffenden Operators $A : X \to X'$, zum anderen die durch die Restriktionen der Konkurrenzklasse $\mathbb{K}$ bedingten. Das hier untersuchte Verfahren linearisiert den Operator, die Restriktionen bleiben unangetastet. Dabei werden - ausgehend von $u^0 \in \mathbb{K}$ - die nichtlinearen Abbildungen $A : X \to X'$ sukzessive durch die affin-linearen Operatoren $Au^n + A'(u^n)(\cdot - u^n)$, die Tangenten an A in u^n , ersetzt und für $n = 0,1,\ldots$ die linearen Variationsungleichungen

$$(7.1.10) \quad u^{n+1} \in \mathbb{K} \;\; \forall \, v \in \mathbb{K} : \; \langle Au^n + A'(u^n)(u^{n+1}-u^n), v-u^{n+1} \rangle \geq 0$$

gelöst. Im Gegensatz zum Newton-Verfahren bei Operatorgleichungen handelt es sich hier aber - wegen der Restriktionen in $\mathbb{K}$ - immer noch um nichtlineare Probleme.

Bemerkung 7.1.1

In der Anwendung auf Hindernisprobleme sind alle Variationsungleichungen (7.1.10) eindeutig lösbar, denn die Linearisierungen B, $Bu := Aw + A'(w)(u-w)$, sind dort für alle $w \in X$ stark monotone, Lipschitz-stetige Operatoren.

#

Im Fall, daß A ein Potentialoperator ist, läßt das Newton-Verfahren eine weitere Deutung zu. Sei J das Potential von A. Dann ist die Variationsungleichung (7.1.9) äquivalent zur Minimumaufgabe

$$u^* \in \mathbb{K} \quad \forall\, v \in \mathbb{K}: \; J(u^*) \leq J(v)$$

und die linearisierte Aufgabe (7.1.10) äquivalent zum Minimumproblem

$$u^{n+1} \in \mathbb{K} \quad \forall\, v \in \mathbb{K}: \; J_n(u^{n+1}) \leq J_n(v) \; .$$

Dabei sei

$$J_n(u) := J(u^n) + \langle J'(u^n), u-u^n\rangle + \frac{1}{2}\langle J''(u^n)(u-u^n), u-u^n\rangle \; .$$

Im Newton-Verfahren wird also - ausgehend von $u^0 \in \mathbb{K}$ - das Potential J sukzessive durch die Stützparabeln J_n, d.h. durch die nach dem quadratischen Glied abgebrochenen Taylorentwicklungen von J um u^n ersetzt und anschließend J_n anstelle von J auf $\mathbb{K}$ minimiert. Das Newton-Verfahren für Variationsungleichungen ist damit eine Verallgemeinerung der von LEVITIN & POLYAK [60] für konvexe Optimierungsaufgaben auf Banachräumen vorgeschlagenen Methode [1].

Auch bei Variationsungleichungen liefern Abschätzungen des Fehlers der (n+1)-ten Iterierten durch den der n-ten den Schlüssel für die Konvergenz des Verfahrens. Ganz im Gegensatz zu den Verhältnissen bei Operatorgleichungen kennt man hier aber keine Darstellung von u^*-u^{n+1}. Das folgende Störungslemma, in dem Störungen des Operators $A: X \to X'$

---

[1] Für eine mit der Methode von Goldstein gedämpfte Variante wird in [97] globale Konvergenz gezeigt. Siehe auch [10; S.203ff].

untersucht werden, erlaubt den Vergleich von Lösungen benachbarter Variationsungleichungen.

Lemma 7.1.2

Seien $A_1, A_2 : X \to X'$. A_1 sei stark monoton auf $\mathbb{K}$,

$$\exists\, m > 0 \quad \forall\, u,v \in \mathbb{K}: \langle A_1 u - A_1 v, u-v\rangle \geq m \|u-v\|^2 .$$

Es existieren Lösungen u_1 bzw. u_2 der Variationsungleichungen

(7.1.11) $u_1 \in \mathbb{K} \quad \forall\, v \in \mathbb{K}: \langle A_1 u_1, v-u_1\rangle \geq 0$,

(7.1.12) $u_2 \in \mathbb{K} \quad \forall\, v \in \mathbb{K}: \langle A_2 u_2, v-u_2\rangle \geq 0$.

Dann gilt

(7.1.13) $$\|u_1-u_2\|^2 \leq \frac{1}{m} \langle (A_2-A_1)u_2, u_1-u_2\rangle .$$

Beweis:

Wegen der starken Monotonie von A_1 ist

$$m\|u_1-u_2\|^2 \leq \langle A_1u_1 - A_1u_2, u_1-u_2\rangle$$
$$= \langle A_1u_1 - A_2u_2, u_1-u_2\rangle + \langle (A_2-A_1)u_2, u_1-u_2\rangle .$$

Nach Definition von u_1 bzw. u_2 ist

$$\langle A_1u_1 - A_2u_2, u_1-u_2\rangle = \langle A_1u_1, u_1-u_2\rangle - \langle A_2u_2, u_1-u_2\rangle$$
$$= -\langle A_1u_1, u_2-u_1\rangle - \langle A_2u_2, u_1-u_2\rangle \leq 0 .$$

Damit ist

$$m\|u_1-u_2\|^2 \leq \langle (A_2-A_1)u_2, u_1-u_2\rangle .$$

##

Das Newton-Verfahren liefert - ausgehend vom Startwert u^0 - die induktiv definierte Folge der Newton-Iterierten $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dabei ist u^{n+1} die Lösung der an der vorangegangenen Stelle u^n linearisierten Variationsungleichung (7.1.10). Die Anwendung des Störungslemmas auf diese, das Newton-Verfahren definierende Variationsungleichung (7.1.10) und die Variationsungleichung (7.1.9) des ursprünglichen

Problems liefert Fehlerabschätzungen, mit deren Hilfe die lokale Konvergenz der Newton-Iterierten u^n gegen u^* gezeigt werden kann.

Satz 7.1.3 (Ostrowski-Kantorowitsch)

Sei D ein affiner Teilraum von X, $\mathbb{K} \subset D$, $A : X \to X'$ stark monoton auf D und differenzierbar. u^* sei die Lösung von (7.1.9). $A' : X \to L(X,X')$ sei stetig in u^*.

Dann gilt:

(a) Das Newton-Verfahren (7.1.10) konvergiert lokal superlinear, d.h. es gilt

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, u^0 \in X : \;\; \|u^0 - u^*\| \leq \varepsilon \Rightarrow u^n \to u^*, \; n \to \infty \quad \text{und}$$

$$\forall\, q > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \geq n_0 : \;\; \|u^{n+1} - u^*\| \leq q \, \|u^n - u^*\| .$$

(b) Ist zusätzlich $A' : X \to L(X,X')$ Lipschitz-stetig, dann konvergiert $(u^n)_n$ lokal quadratisch, d.h.

$$\exists\, c \geq 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}_0 : \;\; \|u^{n+1} - u^*\| \leq c \, \|u^n - u^*\|^2 .$$

Beweis:

Wegen Lemma 3.1.16(b) ist der Operator $A_1 : X \to X'$, $A_1 := Au^n + A'(u^n)(\cdot - u^n)$, stark monoton auf $D-D$. Die Anwendung des Störungslemmas auf A_1, $u_1 := u^{n+1}$, $A_2 := A$, $u_2 := u^*$ liefert mit (3.1.4)

$$\begin{aligned} m \, \|u^{n+1} - u^*\|^2 &\leq \langle Au^* - Au^n - A'(u^n)(u^* - u^n), u^{n+1} - u^* \rangle \\ &= \int_0^1 \{ \langle [A'(u^n + t(u^* - u^n)) - A'(u^n)](u^* - u^n), u^{n+1} - u^* \rangle \} \, dt \\ &\leq \int_0^1 \|A'(u^n + t(u^* - u^n)) - A'(u^n)\| \, dt \; \|u^* - u^n\| \; \|u^{n+1} - u^*\| . \end{aligned}$$

Sei jetzt $A' : X \to L(X,X')$ stetig in u^*. Dann gilt:

$$\forall\, q \in (0,1) \;\; \exists\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, u,v \in X : \;\; \|u - u^*\| \leq \varepsilon \wedge \|v - u^*\| \leq \varepsilon \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \|A'(u) - A'(v)\| &\leq \|A'(u) - A'(u^*)\| + \|A'(v) - A'(u^*)\| \\ &\leq q \, m . \end{aligned}$$

Wir zeigen durch Induktion $\|u^n-u^*\| \leq \varepsilon$.

Ist $\|u^n-u^*\| \leq \varepsilon$, dann gilt

$$\forall\, t \in [0,1] : \quad \|u^n + t(u^*-u^n) - u^*\| \leq \varepsilon$$

und damit

$$\begin{aligned}\|u^{n+1}-u^*\| &\leq \frac{1}{m} \int_0^1 \|A'(u^n + t(u^*-u^n)) - A'(u^n)\|\, dt \;\; \|u^n-u^*\| \\ &\leq q\, \|u^n-u^*\| \leq q\,\varepsilon \leq \varepsilon\end{aligned}$$

Für $q = \frac{1}{2}$ folgt daraus die lokale Konvergenz und anschliessend die superlineare Konvergenzgeschwindigkeit.

Ist zusätzlich $A' : X \to L(X,X')$ Lipschitz-stetig, dann gilt darüberhinaus

$$\begin{aligned}\|u^{n+1}-u^*\| &\leq \frac{1}{m} \int_0^1 \|A'(u^n + t(u^*-u^n)) - A'(u^n)\|\, dt \;\; \|u^n-u^*\| \\ &\leq \frac{L}{2m} \;\; \|u^n-u^*\|^2 ,\end{aligned}$$

also quadratische Konvergenz.

##

Wir kehren jetzt zum diskreten Hindernisproblem (7.1.1), (7.1.2) bzw. (7.1.3), (7.1.4) zurück. Für Differentialoperatoren mit linearem Hauptteil folgt aus Satz 3.2.4(d) und Satz 7.1.3(a) unmittelbar die lokale Konvergenz des Newton-Verfahrens, angewandt auf das diskrete Hindernisproblem. Für allgemeinere Differentialoperatoren müssen wir zusätzliche Glattheitseigenschaften fordern.

(A4) Die Koeffizientenfunktionen

$$\begin{aligned}\alpha &: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2,2} \quad , \quad (x,z,\zeta) \mapsto \alpha(x,z,\zeta) \;, \\ \gamma_i &: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad (x,z,\zeta) \mapsto \gamma_i(x,z,\zeta) \;, \; i = 1,2 \;, \\ \beta &: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad , \quad (x,z,\zeta) \mapsto \beta(x,z,\zeta) \;,\end{aligned}$$

erfüllen eine globale Lipschitz-Bedingung bezüglich z und ζ, d.h.

$$\exists\, L \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall z^1, z^2 \in \mathbb{R} \quad \forall \zeta^1, \zeta^2 \in \mathbb{R}^2 :$$

$$|\alpha(x,z^1,\zeta^1) - \alpha(x,z^2,\zeta^2)| \leq L \cdot \max\,(|z^1-z^2|, |\zeta^1-\zeta^2|) ,$$

$$|\gamma_i(x,z^1,\zeta^1) - \gamma_i(x,z^2,\zeta^2)| \leq L \cdot \max\,(|z^1-z^2|, |\zeta^1-\zeta^2|) , \quad i = 1,2 ,$$

$$|\beta(x,z^1,\zeta^1) - \beta(x,z^2,\zeta^2)| \leq L \cdot \max\,(|z^1-z^2|, |\zeta^1-\zeta^2|) .$$

Lemma 7.1.4

Es gelte (A1), (A2), (A4).

Dann ist

$$A'|_{W^1_\infty(\Omega)} : W^1_\infty(\Omega) \to L(H^1(\Omega), (H^1(\Omega))')$$

Lipschitz-stetig.

Beweis:

Seien $u^1, u^2 \in W^1_\infty(\Omega)$, $v,w \in H^1(\Omega)$. Dann ist

$$|\langle [A'(u^1) - A'(u^2)]v, w\rangle| \leq$$

$$\leq \int_\Omega \{ |\alpha(x,u^1,\nabla u^1) - \alpha(x,u^2,\nabla u^2)|\,|\nabla v|\,|\nabla w| \}\, dx$$
$$+ \int_\Omega \{ |\gamma_1(x,u^1,\nabla u^1) - \gamma_1(x,u^2,\nabla u^2)|\,|v|\,|\nabla w| \}\, dx$$
$$+ \int_\Omega \{ |\gamma_2(x,u^1,\nabla u^1) - \gamma_2(x,u^2,\nabla u^2)|\,|\nabla v|\,|w| \}\, dx$$
$$+ \int_\Omega \{ |\beta(x,u^1,\nabla u^1) - \beta(x,u^2,\nabla u^2)|\,|v|\,|w| \}\, dx$$
$$\leq 4L\, \|u^1-u^2\|_{1,\infty}\, \|v\|_1\, \|w\|_1 .$$

##

Korollar 7.1.5

Es gelte (A1), (A2), (A3), (A4).

Dann konvergiert das Newton-Verfahren, angewandt auf das diskrete Hindernisproblem (7.1.1), (7.1.2) (bzw. (7.1.3), (7.1.4)) lokal quadratisch.

Beweis:

Wegen $S_h(\Omega_h) \subset W_\infty^1(\Omega)$, der Äquivalenz aller Normen auf endlichdimensionalen Räumen und Lemma 7.1.4 ist

$$A'|_{S_h(\Omega_h)} : S_h(\Omega_h) \to L(S_h(\Omega_h), (S_h(\Omega_h))')$$

Lipschitz-stetig bezüglich der $\|\cdot\|_1$-Norm. Die Behauptung folgt jetzt aus Satz 7.1.3.

##

Damit ist das nichtlineare Hindernisproblem (7.1.3), (7.1.4) auf eine Folge linearer Hindernisprobleme im $\mathbb{R}^M$ zurückgeführt. Im Potentialfall gibt es zur Lösung dieser linearen, symmetrischen Hindernisprobleme (bzw. Komplementaritätssysteme) eine Reihe von Verfahren [1], darunter das häufig benutzte SOR-Verfahren mit Projektion (siehe [33]).

Wir zeigen jetzt, daß im unsymmetrischen Fall das Gauß-Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren mit Projektion anwendbar sind.

Dazu betrachten wir eine irreduzibel diagonal dominante Matrix $S \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, mit

(7.1.14(a)) $\quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n : x \neq 0 \Rightarrow x^t S x > 0$,

(7.1.14(b)) $\quad \forall\, i,j \in \{1,\ldots,n\} : s_{ii} > 0 \wedge (i \neq j \Rightarrow s_{ij} \leq 0)$

und Vektoren $\mu, b \in \mathbb{R}^n$. Gesucht ist eine Lösung der linearen Variationsungleichung

(7.1.15) $\quad x^* \in K \;\forall\, y \in K : (y-x^*)^t (Sx^*-b) \geq 0$,

$$K := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \geq \mu\}$$ [2] ,

oder dazu äquivalent des linearen Komplementaritätssystems

(7.1.16) $\quad x^* \geq \mu$, $Sx^* \geq b$, $(x^*-\mu)(Sx^*-b) = 0$.

---

1) Siehe [31], [38; S.111ff], [47], [48; Chap. II und App. II] und die darin angegebene Literatur, auch [32], [40], [80].

2) Die Ordnung $y \geq \mu$ ist komponentenweise zu verstehen, $y_i \geq \mu_i$, $i = 1,\ldots,n$.

Wir zerlegen die Matrix S, $S = D - E - F$, wobei D der Diagonalanteil von S ist, und E bzw. F strikte untere bzw. obere Dreiecksmatrizen sind (vgl. Fig. 11).

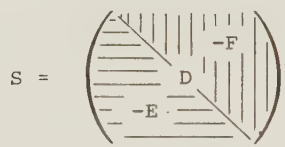

Fig. 11: Zerlegung der Matrix S, $S = D - E - F$.

Damit werden zwei Iterationsverfahren definiert:

(7.1.17) $x^{k+1} := P[D^{-1}(b + (E+F)x^k)]$, $k = 0,1,\ldots$,

("Gesamtschritt- oder Gauß-Jacobi-Verfahren mit Projektion"),

(7.1.18) $x^{k+1} := P[D^{-1}(b + Ex^{k+1} + Fx^k)]$, $k = 0,1,\ldots$

("Einzelschritt- oder Gauß-Seidel-Verfahren mit Projektion").

Dabei sei

$$P : \mathbb{R}^n \to \mathbf{K}$$

die metrische Projektion (bezüglich der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^n$).

Zuerst geben wir eine Charakterisierung und zeigen die Nichtexpansivität von P.

Lemma 7.1.6

Die metrische Projektion $P : \mathbb{R}^n \to \mathbf{K}$ ist gegeben durch

(7.1.19) $Px = \max(x,\mu) := (\max(x_i,\mu_i))_{i=1,\ldots,n}$.

Außerdem gilt [1]

(7.1.20) $\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n : |Px-Py| \leq |x-y| \wedge \|Px-Py\| \leq \|x-y\|$.

---

[1] Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $|x| := (|x_i|)_{i=1,\ldots,n}$, und $\|x\|$ die euklidische Norm von x.

Beweis: [1]

Sei $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbf{K}$ definiert durch $Qx := \max(x,\mu)$.
Seien $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbf{K}$.

Falls $x_i = \max(x_i,\mu_i)$ für $i \in \{1,\ldots,n\}$ gilt, ist

$((Qx)_i - x_i)(y_i - (Qx)_i) = (x_i - x_i)(y_i - x_i) = 0$.

Ist andererseits $\mu_i = \max(x_i,\mu_i)$, dann gilt $x_i \leq \mu_i$,

$((Qx)_i - x_i)(y_i - (Qx)_i) = (\mu_i - x_i)(y_i - \mu_i) \geq 0$.

Also ist

$$\forall\, y \in \mathbf{K} : (Qx-x)^t(y-Qx) \geq 0 .$$

Das charakterisiert aber gerade den metrischen Projektor auf $\mathbf{K}$. Also ist $P = Q$.

Seien jetzt $x,y \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\forall\, i \in \{1,\ldots,n\} : ((Px)_i - x_i)((Py)_i - (Px)_i) \geq 0 ,$$
$$((Py)_i - y_i)((Px)_i - (Py)_i) \geq 0 .$$

Addition ergibt

$$(y_i - x_i)((Py)_i - (Px)_i) \geq ((Py)_i - (Px)_i)^2 \geq 0$$

und damit

$$|(Py)_i - (Px)_i| \leq |y_i - x_i| .$$

Also gilt $|Py-Px| \leq |y-x|$ und wegen

$$\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n : |x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$$

folgt daraus unmittelbar $\|Py-Px\| \leq \|y-x\|$.

##

Die Iterationsverfahren (7.1.17) und (7.1.18) konvergieren - falls überhaupt - gegen eine Lösung des Komplementaritätssystems (7.1.16) und damit auch der Variationsungleichung (7.1.15) .

---

[1] Vgl. [57; S.8-10].

Lemma 7.1.7

Jeder Fixpunkt der Iteration (7.1.17) oder (7.1.18) ist Lösung von (7.1.16) und damit auch von (7.1.15).

Beweis:

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x = P[D^{-1}(b + Ex + Fx)]$.
Wegen (7.1.19) ist dann für $i \in \{1,\dots,n\}$

$$x_i = \max\left(\mu_i, \frac{1}{d_i}(b + Ex + Fx)_i\right) .$$

1. Fall: $\frac{1}{d_i}(b + Ex + Fx)_i \geq \mu_i$

$$\Rightarrow (Sx)_i = d_i x_i - (Ex)_i - (Fx)_i = b_i .$$

2. Fall: $\frac{1}{d_i}(b + Ex + Fx)_i < \mu_i$.

Dann ist $x_i = \mu_i$ und wegen $d_i = s_{ii} > 0$ gilt

$$(Sx)_i = d_i x_i - (Ex)_i - (Fx)_i = d_i[\mu_i - \frac{1}{d_i}(Ex + Fx)_i]$$
$$> d_i[\frac{1}{d_i} b_i] = b_i .$$

Es gilt also

$$Sx \geq b \ , \ x \geq \mu \ , \ (Sx-b)^t(x-\mu) = 0 \ ,$$

d.h. x löst (7.1.16).

##

Daraus ergibt sich die Konvergenz der beiden Iterationsverfahren.

Satz 7.1.8

Die Iterationsverfahren (7.1.17) und (7.1.18) konvergieren für jeden Startwert $x^0 \in \mathbb{R}^n$ gegen die Lösung von (7.1.16) und (7.1.15).

Beweis:

Zuerst betrachten wir das projizierte Gesamtschrittverfahren (7.1.17). Hier ist

$$x^{k+1} = P[D^{-1}(b + (E+F)x^k)] .$$

Wegen (7.1.14(a)) ist die Lösung x^* von (7.1.16) eindeutig bestimmt. Außerdem gilt $\rho(D^{-1}(E+F)) < 1$ [1]. Wegen (7.1.20) ist dann

$$\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n: \quad \|P[D^{-1}(b + (E+F)x)] - P[D^{-1}(b + (E+F)y]\|$$
$$\leq \|D^{-1}(E+F)(x-y)\| \leq \rho(D^{-1}(E+F))\, \|x-y\| .$$

Aufgrund des Banachschen Fixpunktsatzes [2] existiert dann ein Fixpunkt der Iteration (7.1.17). Wegen Lemma 7.1.7 gilt also

$$x^* = P[D^{-1}(b + (E+F)x^*)] .$$

Damit ist

$$\|x^{k+1}-x^*\| = \|P[D^{-1}(b + (E+F)x^k)] - P[D^{-1}(b + (E+F)x^*)]\|$$
$$\leq \rho(D^{-1}(E+F))\, \|x^k-x^*\| ,$$

und deswegen $x^k \to x^*$, $k \to \infty$.

Beim projizierten Einzelschrittverfahren ist analog

$$|x^{k+1}-x^*| = |P[D^{-1}(b + Ex^{k+1} + Fx^k)] - P[D^{-1}(b + (E+F)x^*)]|$$
$$\leq |D^{-1}E(x^{k+1}-x^*)| + |D^{-1}F(x^k-x^*)|$$
$$\leq D^{-1}E|x^{k+1}-x^*| + D^{-1}F|x^k-x^*| .$$

Die letzte Ungleichung besteht, da für $B \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \geq 0$, und $y \in \mathbb{R}^n$ gilt: $-B|y| \leq By \leq B|y|$ und damit $|By| \leq B|y|$; außerdem sind nach Voraussetzung (7.1.14(b)) $D^{-1}E \geq 0$ und $D^{-1}F \geq 0$. Damit ist

$$(I-D^{-1}E)|x^{k+1}-x^*| \leq D^{-1}F|x^k-x^*| .$$

Wegen

$$(I-D^{-1}E)^{-1} = (D^{-1}(D-E))^{-1} = (D-E)^{-1}D \geq 0$$ [3]

folgt weiter

$$|x^{k+1}-x^*| \leq (D-E)^{-1}F|x^k-x^*|$$

---

1) Siehe [96; Th. 3.4 , S.73] .

2) Siehe etwa [81; 5.1.3, S.120] .

3) Siehe [96; Cor. 1 und Th. 3.12, S.85] .

und daraus

$$\|x^{k+1}-x^*\| \leq \rho((D-E)^{-1}F)\ \|x^k-x^*\| \ .$$

Wegen (7.1.14) ist auch $\rho((D-E)^{-1}F) < 1$ [1], so daß gilt:

$x^k \to x^*$, $k \to \infty$.

##

Bemerkung 7.1.9

(a) Der Beweis dieses Satzes zeigt darüberhinaus, daß die projizierten Iterationsverfahren mit mindestens derselben Geschwindigkeit konvergieren, die man auch für die nicht-projizierten Verfahren erwarten darf.

(b) Seien die Voraussetzungen von Abschnitt 6.2 erfüllt, d.h. $(T_h)_h$, $(\tilde{T}_h)_h$ seien reguläre Familien von Triangulierungen, die der Winkelbedingung (6.1.4) und der Inversenbedingung (4.2.4) genügen; für die Koeffizientenfunktionen des Differentialoperators A gelte (A1+), (A2), (A3+).

Dann ist für genügend kleine Maschenweiten h das Newton-Verfahren lokal konvergent. Außerdem können die im Newton-Verfahren auftretenden linearen diskreten Variationsungleichungen mit dem projizierten Gauß-Jacobi- und mit dem projizierten Gauß-Seidel-Verfahren iterativ gelöst werden. Im Beweis von Lemma 6.1.8 wurden nämlich die zur Konvergenz dieser Iterationsverfahren benötigten Voraussetzungen (7.1.14) nachgewiesen.

#

---

1) Siehe [96; Th. 3.4, S.73] .

7.2 Konstruktion von Testbeispielen

In diesem Abschnitt konstruieren wir drei typische Hindernisprobleme mit nichtlinearen Differentialoperatoren und geben explizit rotationssymmetrische Lösungen an. Dazu betrachten wir spezielle Typen von Koeffizientenfunktionen a, b und rotationssymmetrische Funktionen u^*, χ, f. Zuerst rechnen wir Au für rotationssymmetrische Funktionen u aus. Danach spezifizieren wir Ω, Ω°, Ω^+ und χ.

Im ersten Beispiel ist A fastlinear (klassisch $Au = -\Delta u + b(u) - f$), im zweiten quasilinear (klassisch $Au = -\Delta u + \tilde{b}(|\nabla u|) - f$), im dritten liegt der Minimalflächenoperator (klassisch $Au = -\mathrm{div}((1+|\nabla u|^2)^{-1/2}\nabla u)$) vor.

Den Nachweis, daß die jeweiligen Funktionen u^* Lösungen der Hindernisprobleme

$$(7.2.1)\quad \forall\, v \in \mathbb{K}: \langle Au^*, v-u^*\rangle \geq 0\ ,$$

$$\mathbb{K} = \{v \in H^1(\Omega) \mid\ v \geq \chi \ \text{ f.ü. auf } \Omega\ ,\ v|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}\}\ ,$$

sind, führen wir über die äquivalenten Komplementaritätssysteme

$$(7.2.2)\quad Au^* \geq 0\ ,\ u^* \geq \chi\ ,\ Au^*(u^*-\chi) = 0 \ \text{ f.ü. auf } \Omega\ .$$

Für $x^\circ \in \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ setzen wir $r := |x-x^\circ|$ und betrachten Funktionen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die bezüglich x° rotationssymmetrisch sind,

$$(7.2.3)\quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2: u(x) = \varphi(r) \ \text{ mit } \ \varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}\ .$$

Dann ist

$$(7.2.4)\quad \nabla u(x) = \varphi'(r)\frac{x-x^\circ}{r}\ ,\ |\nabla u(x)| = |\varphi'(r)|\ .$$

Für die Hessematrix

$$\nabla^2 u := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u\right)_{i,j=1,2}$$

von u gilt

$$(7.2.5)\quad \nabla^2 u(x) = \frac{1}{r^2}\left(\varphi''(r) - \frac{\varphi'(r)}{r}\right)(x-x^\circ)(x-x^\circ)^t + \frac{\varphi'(r)}{r}\, I\ .$$

Wir beschränken uns auf Koeffizientenfunktionen a, b und f mit spezieller Gestalt,

$$
\begin{aligned}
&a(x,z,\zeta) = \tilde{a}(|\zeta|^2)\zeta\ , \quad \tilde{a} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}\ , \\
&b(x,z,\zeta) = \tilde{b}(z,|\zeta|)\ , \quad \tilde{b} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}\ , \\
&f(x) = \tilde{f}(r)\ , \qquad\qquad \tilde{f} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}\ .
\end{aligned}
\tag{7.2.6}
$$

Für glatte, rotationssymmetrische Funktionen u ist dann

$$
\begin{aligned}
Au(x) &= -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) + b(x,u,\nabla u) - f(x) \\
&= -\tilde{a}(|\nabla u|^2)\,\Delta u - \tilde{a}'(|\nabla u|^2)\, 2\, \nabla u^t (\nabla^2 u) \nabla u \\
&\quad + \tilde{b}(u,|\nabla u|) - \tilde{f}(r)\ .
\end{aligned}
$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= \varphi'' - \frac{\varphi'}{r} + 2\frac{\varphi'}{r} = \varphi'' + \frac{\varphi'}{r}\ , \\
\nabla u^t (\nabla^2 u) \nabla u &= \frac{\varphi'}{r}(x-x^\circ)^t \left[\frac{1}{r^2}(\varphi'' - \frac{\varphi'}{r})(x-x^\circ)(x-x^\circ)^t + \frac{\varphi'}{r} I\right] \frac{\varphi'}{r}(x-x^\circ) \\
&= (\varphi')^2(\varphi'' - \frac{\varphi'}{r}) + \frac{(\varphi')^3}{r} \\
&= (\varphi')^2 \varphi''
\end{aligned}
$$

ist dann

$$
\begin{aligned}
Au(x) &= -\tilde{a}((\varphi')^2)(\varphi'' + \frac{\varphi'}{r}) - 2\tilde{a}'((\varphi')^2)(\varphi')^2\varphi'' \\
&\quad + \tilde{b}(\varphi,|\varphi'|) - \tilde{f}(r)\ .
\end{aligned}
\tag{7.2.7}
$$

Bei Rotationssymmetrie läßt sich der partielle Differentialausdruck Au also auf den gewöhnlichen Differentialausdruck (7.2.7) reduzieren.

Insbesondere sehen wir daraus, daß für die speziellen Funktionen

$$
\begin{aligned}
&u(x) := \tilde{\varphi}(r) := \sigma_1 + \sigma_2 \ln r + \sigma_3(-\frac{r^2}{4})\ , \ \sigma_1,\sigma_2,\sigma_3 \in \mathbb{R}\ , \\
&\chi(x) := \tilde{\chi}(r) := \tau_1 + \tau_2 r^2\ , \ \tau_1,\tau_2 \in \mathbb{R}\ ,
\end{aligned}
$$

die folgenden Differentialgleichungen gelten:

$$
\begin{aligned}
-\Delta u(x) &= -(\varphi'' + \frac{\varphi'}{r}) = \sigma_3\ , \\
-\Delta \chi(x) &= -4\tau_2\ .
\end{aligned}
\tag{7.2.8}
$$

Als Grundgebiet wählen wir bei allen Beispielen das Einheitsquadrat,

$$\Omega := (0,1) \times (0,1) ,$$

mit Zentrum $x^\circ := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^t$. Für $\rho \in (0, \frac{1}{2})$ sei

$$\Omega^\circ := \{x \in \Omega \mid |x-x^\circ| \leq \rho\}$$

die Kontaktmenge und

$$\Omega^+ = \Omega \setminus \Omega^\circ = \{x \in \Omega \mid |x-x^\circ| > \rho\}$$

die Menge der freien Punkte.

Als Dirichletsche Randbedingung wählen wir immer $g := u^*$.

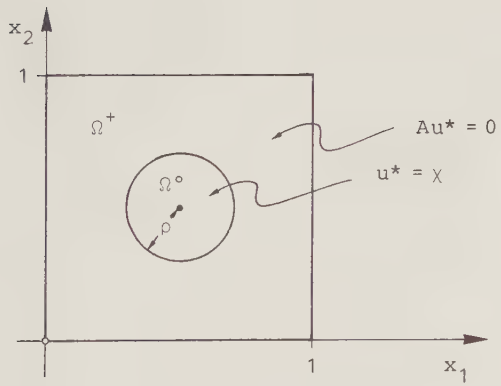

Fig. 12: Das Grundgebiet Ω , $\Omega = \Omega^\circ \cup \Omega^+$.

Der optimale Wert der Konstanten $c(\Omega,\infty)$ in der Friedrichsschen Ungleichung

$$\forall\, u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|_0 \leq c(\Omega,\infty)\, |u|_1$$

ist hier

$$c(\Omega,\infty) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi} .$$

Beispiel 1 (fastlinear)

Sei hier

$$a(x,z,\zeta) := \zeta \ , \ b(x,z,\zeta) = b(z) \ ,$$

d.h. klassisch liegt der Differentialoperator

$$Au = -\Delta u + b(u) - f$$

vor. Speziell für

(7.2.9) $b(z) := \eta(\nu z - \frac{1}{\omega}\sin(\omega z)) \ , \ \eta \geq 0 \ , \ \nu \geq 1 \ , \ \omega > 0 \ ,$

ist

$$\beta(z) = \eta(\nu - \cos(\omega z))$$

und es gilt

$$\forall\, z \in \mathbb{R}: \ 0 \leq \beta(z) \leq \eta(\nu+1) \ .$$

Die Bedingungen (A1+), (A2), (A3+) und (A4) sind hier erfüllt mit $m_\circ := 1$, $\gamma_\circ := \gamma_1 := \gamma_2 := 0$, $\mu_1 := \mu_2 := 0$. Wir setzen:

$$\varphi(r) := \sigma_1 + \sigma_2 \ln r + \sigma_3(-r^2/4) \ , \ r > \rho \ ,$$

$$\tilde{\chi}(r) := \tau_1 + \tau_2 r^2 \ , \ r \in \mathbb{R} \ ,$$

$$\varphi(r) := \tilde{\chi}(r) \ , \ r \in [0,\rho] \ ,$$

$$\tilde{f}(r) := \sigma_3 + b(\varphi(r)) \ , \ r \in \mathbb{R}_0^+ \ ,$$

mit $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\tau_1 \in \mathbb{R}$, $\tau_2 < 0$, und

$$u^*(x) := \varphi(|x-x^\circ|) \ , \ x \in \mathbb{R}^2 \ ,$$

$$\chi(x) := \tilde{\chi}(|x-x^\circ|) \ , \ x \in \mathbb{R}^2 \ ,$$

$$f(x) := \tilde{f}(|x-x^\circ|) \ , \ x \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Dann gilt

$$Au^*(x) = \sigma_3 + b(\varphi(r)) - \tilde{f}(r) = 0 \quad \text{auf } \Omega^+$$

und, falls

(7.2.10) $\sigma_3 \leq -4\tau_2$

gilt, auch

$$Au^*(x) = A\chi(x) = -4\tau_2 - \sigma_3 \geq 0 \quad \text{auf } \Omega^\circ \ .$$

Wenn noch

$$\tau_1 = \sigma_1 + \sigma_2(\ln \rho - \tfrac{1}{2}) \quad , \tag{7.2.11}$$

$$\tau_2 = \frac{\sigma_2}{2\rho^2} - \frac{\sigma_3}{4} \tag{7.2.12}$$

gilt, dann ist $\varphi \in C^{1,1}(\mathbb{R}_0^+)$ und damit $u^* \in W_\infty^2(\Omega)$.
u^* ist also Lösung des Hindernisproblems (7.2.1).
Wegen der Bedingung (7.2.12) ist übrigens $\sigma_2 \leq 0$ hinreichend für die Gültigkeit von (7.2.10).

Die nächste Figur zeigt die exakte Lösung u^* und das Hindernis χ dieses Hindernisproblems mit den folgenden speziellen Werten der Parameter:

$$\rho = 0.2 \ ,$$
$$\sigma_1 = -0.34657359, \quad \sigma_2 = -1 \ , \quad \sigma_3 = 0 \ ,$$
$$\tau_1 = 1.762864322, \quad \tau_2 = -12.5 \ .$$

Wir notieren an dieser Stelle noch die Parameter des Differentialoperators, mit denen im nächsten Abschnitt die numerischen Rechnungen ausgeführt werden.

$$\eta = 1 \ ,$$
$$\nu = 1 \ ,$$
$$\omega = 1 \ .$$

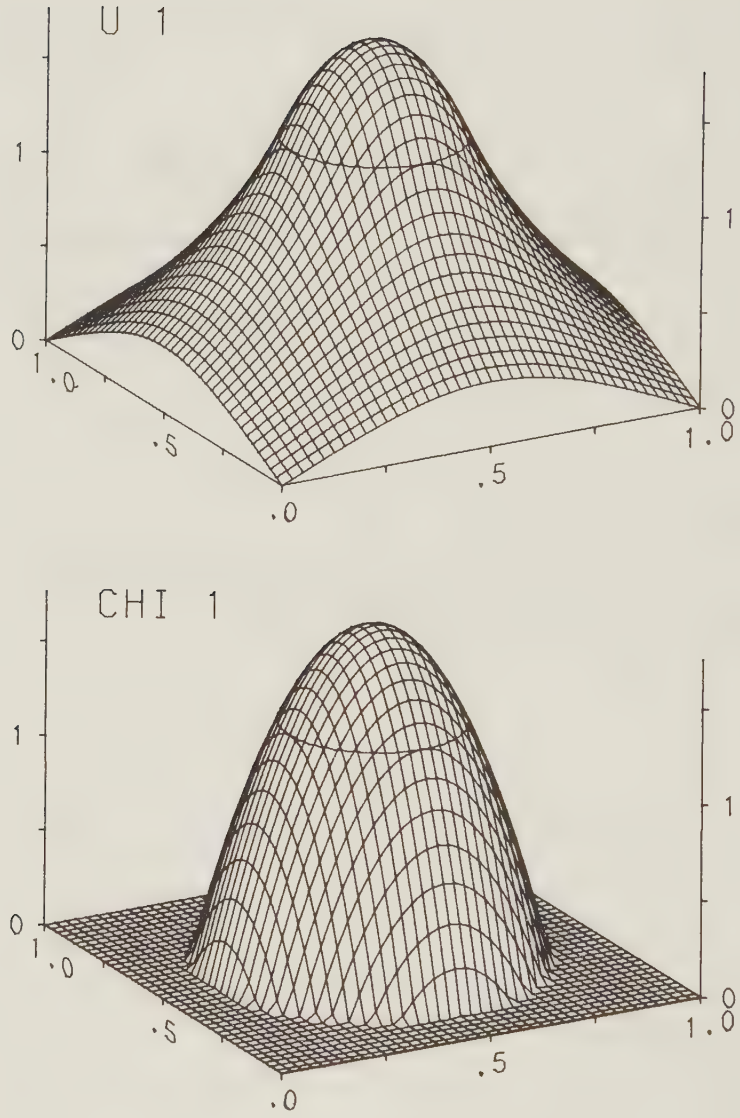

Fig. 13: Exakte Lösung und Hindernis von Beispiel 1.

Beispiel 2 (quasilinear)

Wir setzen hier

$$a(x,z,\zeta) := \zeta \ , \ b(x,z,\zeta) := \tilde{b}(|\zeta|) \ ,$$

d.h. klassisch liegt der folgende Differentialoperator vor:

$$Au = -\Delta u + \tilde{b}(|\nabla u|) - f \ .$$

Speziell für

$$\tilde{b}(t) := \frac{\eta}{\nu + t^2} \ , \ t \in \mathbb{R} \ , \text{ mit } \eta \geq 0 \ , \ \nu > 0 \text{ und}$$

$$\frac{\eta}{\nu^{3/2}} < \frac{8}{3^{3/2}\sqrt{2}}\pi \ ,$$

ist

$$\gamma_2(\zeta) = \tilde{b}'(|\zeta|)\frac{\zeta}{|\zeta|} \ ,$$

$$|\gamma_2(\zeta)| = |\tilde{b}'(|\zeta|)| \leq \frac{\eta}{\nu^{3/2}}\frac{3^{3/2}}{8} < \frac{1}{c(\Omega,\infty)} \ .$$

Die Bedingungen (A1+), (A2), (A3+) und (A4) sind hier erfüllt mit $m_o := 1$, $\gamma_o := \gamma_1 = 0$, $\beta = 0$, $\mu_2 := 0$,

$\mu_1 := \frac{\eta}{\nu^{3/2}}\frac{3^{3/2}}{8}$.

Wir setzen:

$$\varphi(r) := \sigma_1 + \sigma_2 \ln r \ , \ r > \rho \ ,$$

$$\tilde{\chi}(r) := \tau_1 + \tau_2 r^2 \ , \ r \in \mathbb{R} \ ,$$

$$\varphi(r) := \tilde{\chi}(r) \ , \ r \in [0,\rho] \ ,$$

$$\tilde{f}(r) := \frac{\eta r^2}{\sigma_2^2 + \nu r^2} \ , \ r \in \mathbb{R} \ ,$$

mit $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1 \in \mathbb{R}$, $\tau_2 < 0$, und

$$u^*(x) := \varphi(|x-x^\circ|) \ , \ x \in \mathbb{R}^2 \ ,$$

$$\chi(x) := \tilde{\chi}(|x-x^\circ|) \ , \ x \in \mathbb{R}^2 \ ,$$

$$f(x) := \tilde{f}(|x-x^\circ|) \ , \ x \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Dann ist

$$Au^*(x) = \tilde{b}(|\frac{\sigma_2}{r}|) - \tilde{f}(r) = 0 \quad \text{auf } \Omega^+ \ .$$

Falls

$$\eta \leq -4\tau_2 \frac{\sigma_2^2}{\rho^2}$$

gilt, ist auch

$$Au^*(x) = A\chi(x) = -4\tau_2 + \tilde{b}(-2\tau_2 r) - \tilde{f}(r) \geq 0 \quad \text{auf } \Omega^\circ .$$

Wenn noch

$$\tau_1 = \sigma_1 + \sigma_2(\ln \rho - \tfrac{1}{2}) ,$$

$$\tau_2 = \frac{\sigma_2}{2\rho^2}$$

gilt, dann ist $\varphi \in C^{1,1}(\mathbb{R}_0^+)$ und damit $u^* \in W_\infty^2(\Omega)$.
u^* ist also Lösung des Hindernisproblems (7.2.1).

Hier liegt übrigens ein zweidimensionales Beispiel für die schon in Abschnitt 2.2 bemerkte Regularitätsbeschränkung der Lösungen von Hindernisproblemen vor. Obwohl die Daten dieses Beispiels beliebig glatt sind,

$$\chi, f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) ,$$

gilt nicht $u^* \in H^3(\Omega)$.

Wir notieren an dieser Stelle wieder die konkreten Werte der Parameter, für die die im nächsten Abschnitt angegebenen numerischen Rechnungen gelten.

$$\rho = 0.2$$
$$\sigma_1 = -0.34657359 , \quad \sigma_2 = -1 ,$$
$$\tau_1 = 1.762864322 , \quad \tau_2 = -12.5 ,$$
$$\eta = 0.7 , \qquad \nu = 0.25 .$$

Die Lösung u^* und das Hindernis χ dieses Beispiels sind übrigens dieselben wie jene von Beispiel 1.

Beispiel 3 (Minimalfläche mit Hindernis)

Wir setzen hier

$$a(x,z,\zeta) := \tilde{a}(|\zeta|^2) \quad , \; b := 0 \; , \; f := 0 \; .$$

Klassisch ist A der Minimalflächenoperator,

$$Au = -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) .$$

Die einzige vollständige rotationssymmetrische Minimalfläche ist das "Katenoid" [1],

$$u(x) := \psi(|x-x^\circ|) \quad \text{für } x \neq x^\circ \text{ mit}$$

$$\psi(r) := \pm\sigma\cdot\operatorname{areacosh}\left(\frac{r}{\sigma}\right) + c$$

$$= \pm\sigma\cdot\left[\ln\left(r+\sqrt{r^2-\sigma^2}\right) - \ln\sigma\right] + c \quad \text{für } r > 0$$

mit $c \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

Die Bedingungen (A1), (A2) und (A4) sind hier erfüllt mit $\gamma_\circ := \gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\beta = 0$, $\mu_1 := \mu_2 := 0$. Jedoch ist die für die Monotonieeigenschaften hinreichende Bedingung (A3) verletzt.

Wir setzen:

$$\varphi(r) := \sigma_1 - \sigma_2 \ln\left(r+\sqrt{r^2-\sigma_2^2}\right) \; , \; r > \rho \; ,$$

$$\tilde{\chi}(r) := \tau_1 + \tau_2 r^2 \; , \; r \in \mathbb{R} \; ,$$

$$\varphi(r) := \tilde{\chi}(r) \; , \; r \in [0,\rho]$$

mit $\sigma_1, \tau_1 \in \mathbb{R}$, $\sigma_2 \in (0,\rho)$, $\tau_2 < 0$, und

$$u^*(x) := \varphi(|x-x^\circ|) \; , \; x \in \mathbb{R}^2 \; ,$$

$$\chi(x) := \tilde{\chi}(|x-x^\circ|) \; , \; x \in \mathbb{R}^2 \; .$$

Dann ist

$$Au^*(x) = 0 \quad \text{auf } \Omega^+ \; ,$$

$$Au^*(x) = A\chi(x) = -4\tau_2 \frac{1+2\tau_2^2 r^2}{(1+4\tau_2^2 r^2)^{3/2}} > 0 \quad \text{auf } \Omega^\circ \; .$$

---

1) Siehe [59; S.15f].
Für die zweite Darstellung von ψ siehe [22; S.167].

Wenn noch

$$\tau_1 = \sigma_1 + \sigma_2 \frac{\rho}{2\sqrt{\rho^2 - \sigma_2^2}} - \ln(\rho + \sqrt{\rho^2 - \sigma_2^2}) \quad ,$$

$$\tau_2 = - \frac{\sigma_2}{2\rho\sqrt{\rho^2 - \sigma_2^2}}$$

gilt, dann ist $\varphi \in C^{1,1}(\mathbb{R}_0^+)$ und damit $u^* \in W_\infty^2(\Omega)$.

Daraus ergibt sich wie in Lemma 2.2.1, daß u^* Lösung der folgenden Aufgabe ist:

(7.2.13) $\quad \forall\, v \in \mathbb{K}' : \langle Au^*, v-u^* \rangle \geq 0$,

$$\mathbb{K}' := \{ v \in W_\infty^1(\Omega) \mid v \geq \chi \text{ f.ü. auf } \Omega, \; v|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega} \} \; .$$

Für den Fall, daß das Vektorfeld $\zeta \mapsto a(\zeta)$ nicht stark monoton auf $\mathbb{R}^2$ ist, sondern lediglich eine - auch hier für den Minimalflächenoperator vorliegende - sogenannte lokale Koerzitivitätsbedingung erfüllt, versteht man unter einem Hindernisproblem die Aufgabe (7.2.13) [1].

In dieser Situation konstruiert man für eine Konstante $M \geq 0$ mit $|u^*|_{1,\infty} < M$ ein stark monotones Vektorfeld $\zeta \mapsto \hat{a}(\zeta)$, das für $|\zeta| < M$ mit a übereinstimmt,

$$\forall\, \zeta \in \mathbb{R}^2 : |\zeta| < M \Rightarrow a(\zeta) = \hat{a}(\zeta) \; .$$

Diese Koeffizientenfunktion erfüllt jetzt auch die Bedingung (A3). Außerdem hat das Hindernisproblem mit dem zugehörigen modifizierten Operator u^* als Lösung. Korollar 5.2 ist dann anwendbar und liefert

$$\|u^* - \hat{u}_h\|_{1,\Omega_h} = O(h) \; ,$$

wobei $\hat{u}_h$ jetzt die zur modifizierten Koeffizientenfunktion berechnete Näherungslösung bezeichnet.

---

1) Vgl. [57; III.4, S.94ff und IV.4, S.116ff].

Ein anderer Ausweg, in dem wesentlicher Gebrauch von der speziellen Gestalt der Koeffizientenfunktion a des Minimalflächenoperators gemacht wird, ist in [68] vorgeführt. Dort werden a-priori-Schranken für die Gradienten der Ritz-Galerkin-Näherungen u_h^* hergeleitet,

$$\exists\, M \geq 0 \;\; \forall\, h : |u_h^*|_{1,\infty} \leq M \; .$$

Mit der oben beschriebenen Modifikation des Vektorfeldes a, die hier lediglich für beweistheoretische Zwecke vorgenommen wird, folgt dann aus Korollar 5.2 unmittelbar

$$\|u^* - u_h^*\|_{1,\Omega_h} = O(h) \; .$$

Die nächste Figur zeigt die exakte Lösung u^* und das Hindernis χ dieses Hindernisproblems für die folgenden speziellen Werte der Parameter:

$$\rho = 0.2 \; ,$$
$$\sigma_1 = 0.077202459 \; , \; \sigma_2 = 0.245 \; ,$$
$$\tau_1 = 0.987966223 \; , \; \tau_2 = -9.84937059 \; .$$

Auch hier liegt wieder ein zweidimensionales Beispiel für die Regularitätsbeschränkung der Lösungen von Hindernisproblemen vor. Die Daten dieses Beispiels sind beliebig glatt,

$$\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \; , \; f = 0 \; ,$$

aber es gilt nicht $u^* \in H^3(\Omega)$.

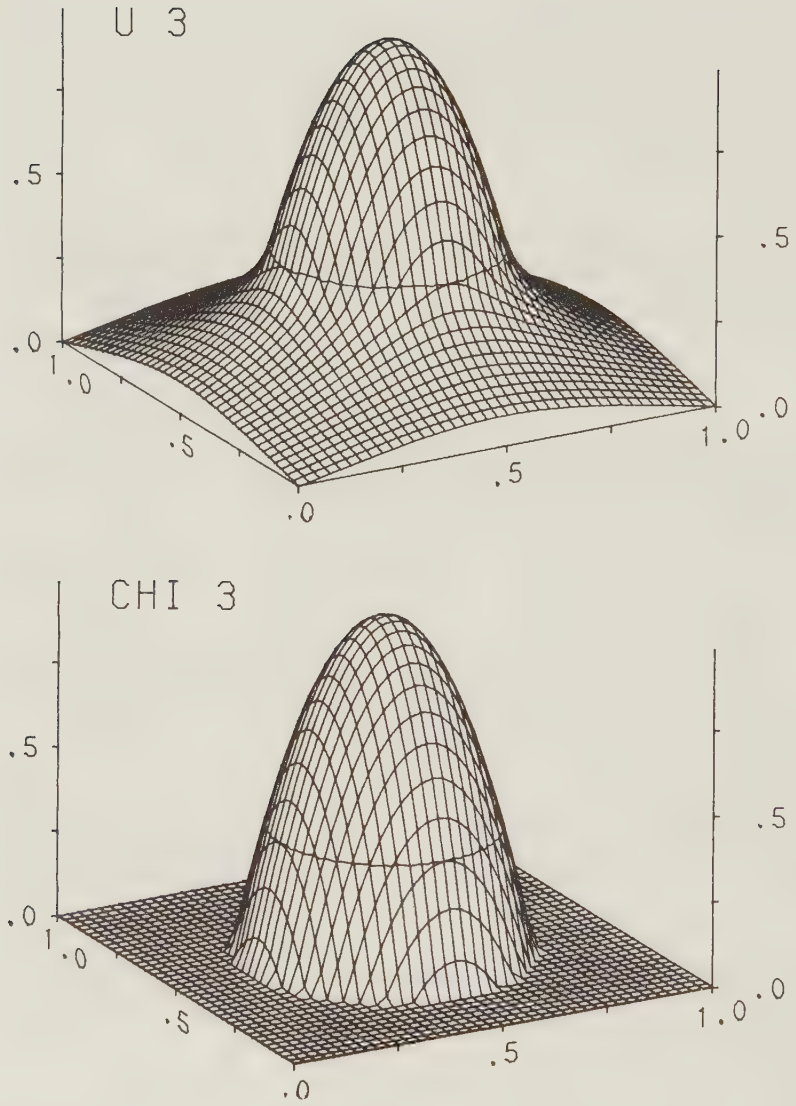

Fig. 14: Exakte Lösung und Hindernis von Beispiel 3.

7.3 Numerische Ergebnisse

In diesem Abschnitt vergleichen wir die theoretischen Konvergenzaussagen aus Korollar 5.2 und Korollar 6.2.6 mit den numerischen Ergebnissen zu den Beispielen aus dem vorangegangenen Abschnitt.

Als Triangulierung des Einheitsquadrats Ω wurde immer eine Unterteilung nach dem Muster der folgenden Fig. 15 gewählt. Außerdem wurde

$$\forall\, h : \tilde{T}_h = T_h \,,\quad \tilde{\Omega}_h = \Omega_h = \Omega$$

gesetzt.

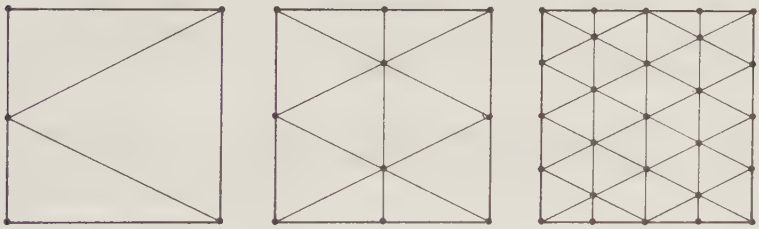

Fig. 15: Triangulierungen des Einheitsquadrats.

Diese Art der Unterteilung liefert eine reguläre Familie von Triangulierungen, die der Inversenbedingung (4.2.4) und der Winkelsummenbedingung (6.1.4) genügt.

Die nichtlinearen Hindernisprobleme

$$u^* \in \mathbb{K} \quad \forall\, v \in \mathbb{K} : \langle Au^*, v-u^* \rangle \geq 0 \,,$$

$$\mathbb{K} = \{ v \in H^1(\Omega) \mid v \geq \chi \text{ f.ü. auf } \Omega \,,\; v|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega} \}$$

wurden mit dem in Abschnitt 4.2 beschriebenen Ritz-Galerkin-Verfahren diskretisiert. Die so entstandenen nichtlinearen

diskreten Hindernisprobleme

$$u_h^* \in \mathbb{K}_h \quad \forall\, v_h \in \mathbb{K}_h : \langle Au_h^*, v_h - u_h^* \rangle \geq 0 \ ,$$

$$\mathbb{K}_h = \{ v_h \in S_h(\Omega) \mid v_h \geq \P_h \chi \text{ auf } \Omega \ , \ v_h|_{\partial\Omega} = \P_h g|_{\partial\Omega} \}$$

wurden mit dem Newton-Verfahren aus Abschnitt 7.1 auf eine Folge linearer diskreter Variationsungleichungen zurückgeführt. Zu einem Startwert $u^0 \in S_h(\Omega)$ mußten die diskreten Aufgaben

$$u_h^{n+1} \in \mathbb{K}_h \quad \forall\, v_h \in \mathbb{K}_h : \langle Au_h^n + A'(u_h^n)(u_h^{n+1} - u_h^n), v_h - u_h^{n+1} \rangle \geq 0 \ ,$$

$$n = 0, 1, \ldots \ ,$$

gelöst werden. In den Beispielen 1 und 3 wurde dazu das SOR-Verfahren mit Projektion (siehe [33] , [48; S.59ff]) verwendet. In Beispiel 2 ist der Differentialoperator A kein Potentialoperator. Deswegen sind die linearen Variationsungleichungen aus dem Newton-Verfahren nicht symmetrisch. Zu ihrer Lösung wurde hier das projizierte Gauß-Seidel-Verfahren (7.1.18) verwendet.

Im fastlinearen Beispiel 1 sind alle von uns gestellten Voraussetzungen erfüllt. Korollar 5.2 sagt

$$\| u^* - u_h^* \|_1 = O(h) \ ,$$

Korollar 6.2.6

$$\| u^* - u_h^* \|_{0,\infty} = O(h^2 |\ln h|^{2/5})$$

voraus. Die nächste Tabelle zeigt die Fehler

$$e_h := u^* - u_h^*$$

in der $L_2(\Omega)$ - , der $L_\infty(\Omega)$ - und in der $H^1(\Omega)$ - Norm. Außerdem werden die, nach der Formel

$$p = \ln\left(\frac{e_{h_1}}{e_{h_2}}\right) / \ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$$

berechneten, zugehörigen Schätzungen der Konvergenzordnung p angegeben,

$$\| e_h \| = O(h^p) \ .$$

Zusätzlich angegeben sind die Maschenweiten h, die Anzahl der Knoten und die Anzahl der Dreiecke der jeweiligen Triangulierung. Alle Rechnungen wurden an der CYBER 175 (CDC) des Leibniz-Rechenzentrums der Bayerischen Akademie der Wissenschaften durchgeführt.

$\frac{5}{4h}$	Kn.	El.	$\|e_h\|_0$	Ord.	$\|e_h\|_{0,\infty}$	Ord.	$\|e_h\|_1$	Ord.
1	5	3	0.692		1.30		2.85	
				1.38		0.69		0.66
2	10	10	0.266		0.808		1.80	
				1.11		1.41		0.78
4	27	36	0.123		0.304		1.05	
				2.16		2.00		0.95
8	85	136	0.0275		0.0760		0.544	
				2.10		1.78		0.94
16	297	528	0.00642		0.0222		0.283	
				2.17		2.22		0.98
32	1105	2080	0.00143		0.00475		0.143	

Tab. 1: Numerische Ergebnisse in Beispiel 1.

Auch im quasilinearen Beispiel 2 sind alle Voraussetzungen erfüllt. In dieser Arbeit wurden die folgenden Fehlerabschätzungen gezeigt:

$$\|u^*-u_h^*\|_1 = O(h) ,$$

$$\|u^*-u_h^*\|_{0,\infty} = O(h^2|\ln h|^{2/5}) .$$

Die nächste Tabelle zeigt die numerischen Resultate.

$\frac{5}{4h}$	Kn.	El.	$\|e_h\|_0$	Ord.	$\|e_h\|_{0,\infty}$	Ord.	$\|e_h\|_1$	Ord.
1	5	3	0.692		1.30		2.85	
				1.38		0.69		0.66
2	10	10	0.266		0.808		1.80	
				1.11		1.41		0.78
4	27	36	0.123		0.304		1.05	
				2.15		2.00		0.95
8	85	136	0.0278		0.0760		0.544	
				2.07		1.76		0.94
16	297	528	0.00662		0.0224		0.283	
				2.16		2.24		0.98
32	1105	2080	0.00148		0.00475		0.143	

Tab. 2: Numerische Ergebnisse in Beispiel 2.

Für den Minimalflächenoperator des Beispiels 3 können mit den in Abschnitt 7.2 angesprochenen Modifikationen Energienormabschätzungen

$$\|u^*-u_h^*\|_1 = O(h)$$

gewonnen werden. Quasioptimale Abschätzungen des $L_\infty(\Omega)$ - oder auch des $L_2(\Omega)$ - Fehlers sind hierfür nicht bekannt. Die nächste Tabelle zeigt die numerischen Resultate.

$\frac{5}{4h}$	Kn.	El.	$\|e_h\|_0$	Ord.	$\|e_h\|_{0,\infty}$	Ord.	$\|e_h\|_1$	Ord.
1	5	3	0.318		0.683		1.99	
				0.85		0.13		0.49
2	10	10	0.177		0.623		1.42	
				1.05		1.38		0.51
4	27	36	0.0856		0.239		1.00	
				1.99		1.98		0.66
8	85	136	0.0215		0.0607		0.632	
				1.70		0.83		0.72
16	297	528	0.00663		0.0341		0.383	
				1.86		1.27		0.90
32	1105	2080	0.00183		0.0141		0.205	

Tab. 3: Numerische Ergebnisse in Beispiel 3.

Die Tabellen 1 und 2 bestätigen deutlich die vorhergesagten Konvergenzordnungen. Die numerischen Resultate für große Maschenweiten sind nicht sehr aussagekräftig. Dort liegen die meisten Knoten auf dem Rand $\partial\Omega$, z.B. gibt es für 5 Knoten keinen inneren Knoten , bei 10 Knoten nur 2, bei 27 Knoten lediglich 11 innere Knoten. Die Fehler werden hier also vom Interpolationsfehler dominiert, auf den die Qualität des Diskretisierungsverfahrens keinen Einfluß hat.

Im Fall der Minimalfläche scheint auch numerisch $O(h)$ in der Energienorm zu gelten. Der $L_2(\Omega)$ - Fehler ist wohl besser als $O(h)$.

ZUSAMMENFASSUNG

Rückblickend bemerken wir, daß als wesentliches Hilfsmittel dieser Arbeit ein "Linearisierungstrick" einging: Eigenschaften nichtlinearer Operatoren A wurden an ihren Linearisierungen A'(u) studiert. Als technisches Hilfsmittel leiteten wir dazu in Abschnitt 3.1 unter schwachen Voraussetzungen Taylorformeln für nichtlineare Operatoren auf normierten Räumen her.

Insbesondere wurden unter schwachen Voraussetzungen gezeigt:

- differentielle Charakterisierungen der Konvexitätseigenschaften von Funktionalen
- differentielle Charakterisierungen der Lipschitz-Stetigkeit eines Operators
- differentielle Charakterisierungen der Monotonieeigenschaften eines Operators
- die starke diskrete Inversmonotonie einer konkreten Klasse quasilinearer partieller Differentialoperatoren.

Mit der Methode in CIARLET & SCHULTZ & VARGA [28] verallgemeinerten wir eine Arbeit von BREZZI & HAGER & RAVIART [20] und zeigten quasioptimale Fehlerabschätzungen in der Energienorm.

Für Operatoren, die stark diskret inversmonoton sind, verallgemeinerten wir ein Ergebnis von BAIOCCHI [4] und schätzten den Fehler in der L_∞-Norm bis auf quasioptimale Zusatzterme durch den Fehler einer verwandten, nichtlinearen Randwertaufgabe ab. Bekannte Fehlerabschätzungen für diese Randwertaufgabe lieferten dann quasioptimale Abschätzungen des Fehlers des Ritz-Galerkin-Verfahrens bei Hindernisproblemen in der L_∞-Norm.

LITERATUR

[1] Adams, R.A.: Sobolev spaces.
New York u.a.: Acad. Press 1975.

[2] Ahmed, N. & Sunada, D.K.: Nonlinear flow in porous media.
J. of the Hydraulics Division, Proc. Amer. Soc. of Civil Engineers 95:HY6, 1847-1857 (1969).

[3] Aubin, J.P.: Approximation of variational inequalities.
Functional Analysis and Optimization, 7th Int. School Ravello 1965, Hrsg.: Caianiello, E.R., 7-14.
New York u.a.: Acad. Press 1966.

[4] Baiocchi, C.: Estimations d'erreur dans L^{∞} pour les inéquations à obstacle.
Math. Aspects Finite Elem. Meth., Proc. Conf. Rom 1975, Hrsg.: Galligani, I. & Magenes, E., Lect. Notes Math. 606, 27-34.
Berlin u.a.: Springer 1977.

[5] Baiocchi, C. & Comincioli, V. & Magenes, E. & Pozzi, G.A.: Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media: Existence and uniqueness theorems.
Ann. Mat. Pura Appl. 97, 1-82 (1973).

[6] Baiocchi, C. & Comincioli, V. & Guerri, V. & Volpi, G.: Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media: A numerical approach.
Calcolo X:1, 1-85 (1973).

[7] Bakushinskii, A.B.: A regularizing algorithm based on the Newton-Kantorovich method for solving variational inequalities.
U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. 16:6, 16-23 (1976).
Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 16:6, 1397-1404 (1976).

[8] Bayada, G. & Chambat, M.: Non linear variational formulation for a cavitation problem in lubrication.
J. Math. Anal. Appl. 90, 286-298 (1982).

[9] Berger, M.S.: Nonlinearity and functional analysis. Lectures on nonlinear problems in mathematical analysis. New York u.a.: Acad. Press 1977.

[10] Blum, E. & Oettli, W.: Mathematische Optimierung. Grundlagen und Verfahren. Berlin u.a.: Springer 1975.

[11] Böhme, R. & Hildebrandt, S. & Tausch, E.: The two-dimensional analogue of the catenary. Pac. J. Math. 88, 247-278 (1980).

[12] Bourgat, J.F. & Duvaut, G.: Numerical analysis of flow with or without wake past a symmetric two-dimensional profile with or without incidence. Int. J. Numer. Methods Eng. 11, 975-993 (1977).

[13] Brezis, H.: Problèmes unilateraux. J. Math. Pures Appl. 51, 1-168 (1972).

[14] Brezis, H.: A new method in the study of subsonic flows. Partial differ. Equat. relat. Top., Tulane Univ. 1974, Hrsg.: Goldstein, J., Lect. Notes Math. 446, 50-64. Berlin u.a.: Springer 1975.

[15] Brezis, H. & Duvaut, G.: Ecoulement avec sillage autour d'un profil symmétrique sans incidence. C.R. Acad. Sci., Paris, Sér. A 264, 928-931 (1967).

[16] Brezis, H. & Kinderlehrer, D.: The smoothness of solutions to nonlinear variational inequalities. Indiana Univ. Math. J. 23, 831-844 (1974).

[17] Brezis, H. & Stampacchia, G.: Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques. Bull. Soc. Math. Fr. 96, 153-180 (1968).

[18] Brezis, H. & Stampacchia, G.: Une nouvelle méthode pour l'étude d'écoulements stationnaires. C.R. Acad. Sci., Paris, Sér. A 276, 129-132 (1973).

[19] Brezis, H. & Stampacchia, G.: The hodograph method in fluid dynamics in the light of variational inequalities. Arch. Ration. Mech. Anal. 61, 1-18 (1976).

[20] Brezzi, F. & Hager, W.W. & Raviart, P.A.: Error estimates for the finite element solution of variational inequalities. Part I. Primal theory.
Numer. Math. 28, 431-443 (1977).

[21] Brezzi, F. & Hager, W.W. & Raviart, P.A.: Error estimates for the finite element solution of variational inequalities. Part II. Mixed methods.
Numer. Math. 31, 1-16 (1978).

[22] Bronstein, I.N. & Semendjajew, K.A.: Taschenbuch der Mathematik.
Zürich u.a.: Harri Deutsch Verlag (16. Auflage) 1976.

[23] Browder, F.E.: Nonlinear elliptic boundary value problems. II.
Trans. Am. Math. Soc. 117, 530-550 (1965).

[24] Capriz, G.: Variational techniques for the analysis of a lubrication problem.
Math. Aspects Finite Elem. Meth., Proc. Conf. Rom 1975, Hrsg.: Galligani, I. & Magenes, E., Lect. Notes Math. 606, 47-55.
Berlin u.a.: Springer 1977.

[25] Ciarlet, P.G.: Discrete variational Green's function. I. Aequationes Math. 4, 74-82 (1970).

[26] Ciarlet, P.G.: The finite element method for elliptic problems.
Amsterdam u.a.: North-Holland Publ. Comp. 1978.

[27] Ciarlet, P.G. & Raviart, P.A.: Maximum priciple and uniform convergence for the finite element method.
Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2, 17-31 (1973).

[28] Ciarlet, P.G.: & Schultz, M.H. & Varga, R.S.: Numerical methods of high-order accuracy for nonlinear boundary value problems. V. Monotone operator theory.
Numer. Math. 13, 51-77 (1969).

[29] Ciavaldini, J.G. & Pogu, M. & Tournemine, G.: Une méthode variationelle non linéaire pour l'étude dans le plan physique d'écoulements compressibles subcritiques en atmosphère infinie.
C.R. Acad. Sci., Paris, Sér. A 281, 1105-1108 (1975).

[30] Collatz, L.: Funktionalanalysis und numerische Mathematik.
Berlin u.a.: Springer 1964.

[31] Cottle, R.W.: Numerical methods for complementarity problems in engineering and applied science.
Computing Methods in Applied Sciences and engineering, I, Proc. Symp. Paris 1977, Hrsg.: Glowinski, R. & Lions, J.L., Lect. Notes Math. 704, 37-52.
Berlin u.a.: Springer 1979.

[32] Cottle, R.W. & Pang, J.S.: On the convergence of a block successive overrelaxation method for a class of linear complementarity problems.
Math. Program. Study 17, 126-138 (1982).

[33] Cryer, C.W.: The solution of a quadratic programming problem using systematic overrelaxation.
SIAM J. Control 9, 385-392 (1971).

[34] Cryer, C.W.: The method of Christopherson for solving free boundary problems for infinite journal bearings by means of finite differences.
Math. Comput. 25, 435-443 (1971).

[35] Dieudonné, J.: Foundations of modern analysis.
New York u.a.: Acad. Press 1960

[36] Domschke, S. & Weinelt, W.: Optimale Konvergenzaussagen für ein Differenzenverfahren zur Lösung einer Klasse von Variationsungleichungen.
Beitr. Numer. Math. 10, 37-45 (1981).

[37] Elliott, C.M.: On a variational inequality formulation of an electrochemical machining moving boundary problem and its approximation by the finite element method.
J. Inst. Math. Appl. 25, 121-131 (1980).

[38] Elliott, C.M. & Ockendon, J.R.: Weak and variational methods for moving boundary problems.
Boston u.a.: Pittmann 1982.

[39] Falk, R.S.: Error estimates for the approximation of a class of variational inequalities.
Math. Comput. 28, 963-971 (1974).

[40] Fletcher, R. & Jackson, M.P.: Minimization of a quadratic function of many variables subject only to lower and upper bounds.
J. Inst. Math. Appl. 14, 159-174 (1974).

[41] Frehse, J. & Rannacher, R.: Asymptotic L^{∞}-error estimates for linear finite element approximations of quasilinear boundary value problems.
SIAM J. Numer. Anal. 15, 418-431 (1978).

[42] Froidevaux, H.: Théorie et solution des équations en mécanique des fluides parfaits à écoulement pseudo-tridimensionnel.
Thèse, Lausanne 1975.

[43] Gajewski, H. & Gröger, K. & Zacharias, K.: Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen.
Berlin: Akademie Verlag 1974.

[44] Gerhardt, C.: Regularity of solutions of nonlinear variational inequalities.
Arch. Ration. Mech. Anal. 52, 389-393 (1973).

[45] Gipser, M.: On global convergence of coordinate relaxation in the case of an unsymmetrical, diagonally dominant Jacobian.
Computing 28, 345-361 (1982).

[46] Glashoff, K. & Werner, B.: Inverse monotonicity of monotone L-operators with applications to quasilinear and free boundary value problems.
J. Math. Anal. Appl. 72, 89-105 (1979).

[47] Glowinski, R.: Lectures on numerical methods for non-linear variational problems.
Tata Institute of Fundamental Research, Bombay.
Berlin u.a.: Springer 1980.

[48] Glowinski, R. & Lions, J.L. & Trémolières, R.: Numerical analysis of variational inequalities.
Amsterdam u.a.: North-Holland Publ. Comp. 1981.

[49] Höhn, W. & Mittelmann, H.D.: Some remarks on the discrete maximum-principle for finite elements of higher order.
Computing 27, 145-154 (1981).

[50] Höhn, W. & Törnig, W. : Ein Maximum-Minimum-Prinzip für Lösungen von Finite-Element-Approximationen für quasilineare elliptische Randwertprobleme.
Computing 18, 267-270 (1977).

[51] Hunt, C. & Nassif, N.R.: On a variational inequality and its approximation, in the theory of semi-conductors.
SIAM J. Numer. Anal. 12, 938-950 (1975).

[52] Janovsky, V. & Whiteman, J.R.: Error analysis for finite element methods for mildly nonlinear variational inequalities.
Numer. Funct. Anal. Optimization 1, 223-232 (1979).

[53] Kantorowitsch, L.W. & Akilow, G.P.:Funktionalanalysis in normierten Räumen.
Berlin: Akademie Verlag 1964.

[54] Kikuchi, N.: Convergence of a penalty method for variational inequalities.
Texas Institute for Computational Mechanics, Report 79-16, Univ. of Texas at Austin 1979.

[55] Kikuchi, N.: Convergence of a penalty-finite element approximation for an obstacle problem.
Numer. Math. 37, 105-120 (1981).

[56] Kikuchi, N. & Song, Y.J.: Remarks on relations between penalty and mixed finite element methods for a class of variational inequalities.
Int. J. Numer. Methods Eng. 15, 1557-1561 (1980).

[57] Kinderlehrer, D. & Stampacchia, G.: An introduction to variational inequalities and their applications.
New York u.a.: Acad. Press 1980.

[58] Langenbach, A.: Monotone Potentialoperatoren in Theorie und Anwendung.
Berlin u.a.: Springer 1977.

[59] Leichtweiss, K.: Minimalflächen im Großen.
Überblicke Mathematik, Bd. 2, 7-50, Hrsg.: Laugwitz, D.
Mannheim u.a.: Bibliographisches Institut, 1969.

[60] Levitin, E.S. & Polyak, B.T.: Constrained minimization methods.
U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. 6:5, 1-50 (1966).
Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 6:5, 787-823 (1966).

[61] Lewy, H. & Stampacchia, G.: On the regularity of the solution of a variational inequality.
Commun. Pure Appl. Math. 22, 153-188 (1969).

[62] Lions, J.L.: Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.
Paris: Dunod & Gauthier-Villars 1969.

[63] Louis, A.: Fehlerabschätzungen für Lösungen quasilinearer elliptischer Differentialgleichungen mittels Finiter Elemente.
Dissertation, Mainz 1976.

[64] Madhav, M.R. & Basak, P.: Ground subsidence due to non-linear flow through deformable porous media.
J. Hydrology 34, 21-33 (1977).

[65] Mancino, O.G. & Stampacchia, G.: Convex programming and variational inequalities.
J. Optimization Theory Appl. 9, 3-23 (1972).

[66] Mangasarian, O.L.: Solution of symmetric linear complementarity problems by iterative methods.
J. Optimization Theory Appl. 22, 465-485 (1977).

[67] Mazzone, S.: Existence and regularity of the solution of certain nonlinear variational inequalities with an obstacle.
Arch. Ration. Mech. Anal. 57, 115-127 (1974).

[68] Mittelmann, H.D.: On the approximate solution of nonlinear variational inequalities.
Numer. Math. 29, 451-462 (1978).

[69] Mittelmann, H.D.: On the efficient solution of nonlinear finite element equations. II. Bound-constrained problems.
Numer. Math. 36, 375-387 (1981).

[70] Mittelmann, H.D.: On the numerical solution of contact problems.
Numerical Solution of Nonlinear Equations, Proc. Symp. Bremen 1980, Hrsg.: Allgower, E.L. & Glashoff, K. & Peitgen, H.-O., Lect. Notes Math. 878, 258-274.
Berlin u.a.: Springer 1981.

[71] Mosco, U.: Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities.
Advances Math. 3:4, 510-585 (1969).

[72] Mosco, U.: Error estimates for some variational inequalities.
Math. Aspects Finite Elem. Meth., Proc. Conf. Rom 1975, Hrsg.: Galligani, I. & Magenes, E., Lect. Notes Math. 606, 224-236.
Berlin u.a.: Springer 1977.

[73] Mosco, U. & Strang, G.: One sided approximation and variational inequalities.
Bull. Am. Math. Soc. 80, 308-312 (1974).

[74] Nashed, M.Z.: Differentiability and related properties of nonlinear operators: Some aspects of the role of differentials in nonlinear functional analysis.
Nonlinear Functional Analysis Appl., Proc. Sem. Madison, Wisconsin 1970, Hrsg. Rall, L.B., 103-309.
New York u.a.: Acad. Press 1971.

[75] Natterer, F.: Optimale L_2-Konvergenz finiter Elemente bei Variationsungleichungen.
Bonner math. Schriften 89, 1-12 (1976).

[76] Nitsche, J.A.: L^∞-convergence of finite element approximations.
Math. Aspects Finite Elem. Meth., Proc. Conf. Rom 1975, Hrsg.: Galligani, I. & Magenes, E., Lect. Notes Math. 606, 261-274.
Berlin u.a.: Springer 1977.

[77] Nitsche, J.C.C.: Variational problems with inequalities as boundary conditions or how to fashion a cheap hat for Giacometti's brother.
Arch. Ration. Mech. Anal. 35, 83-113 (1969).

[78] Noor, M.A.: Finite element error analysis of nonlinear variational inequalities.
Z. Angew. Math. Mech. 60, 631-632 (1980).

[79] O'Leary, D.P.: Conjugate gradient algorithms in the solution of optimization problems for nonlinear elliptic partial differential equations.
Computing 22, 59-77 (1979).

[80] O'Leary, D.P.: A generalized conjugate gradient algorithm for solving a class of quadratic programming problems.
Linear Algebra Appl. 34, 371-399 (1980).

[81] Ortega, J.M. & Rheinboldt, W.C.: Iterative solution of nonlinear equations in several variables.
New York u.a.: Acad. Press 1970.

[82] Pang, J.S. & Chan, D.: Iterative methods for variational and complementarity problems.
Math. Program. 24, 284-313 (1982).

[83] Pascali, D. & Sburlan, S.: Nonlinear mappings of monotone type.
Bucuresti: Ed. Academiei 1978.

[84] Polyak, B.T.: The conjugate gradient method in extremal problems.
U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. 9:4, 94-112 (1969).
Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 9:4, 807-821 (1969).

[85] Pshenichnyi, B.N . & Sobolenko, L.A.: Acceleration of the convergence of the linearization method for the constrained minimization problem.
U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. 20:3, 62-73 (1980).
Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 20:3, 605-614 (1980).

[86] Rannacher, R. & Scott, R.: Some optimal error estimates for piecewise linear finite element approximations.
Math. Comput. 38, 437-445 (1982).

[87] Roux, J.: Résolution numérique d'un problème d'écoulement subsonique de fluide compressible.
RAIRO, Anal. Numér. 11, 197-208 (1977).

[88] Rudin, W.: Real and complex analysis.
New York u.a.: McGraw Hill (2. ed.) 1974.

[89] Schaefer, H.H.: Topological vector spaces.
Berlin u.a.: Springer (3. verb. Aufl.) 1971.

[90] Sibony, M.: Sur l'approximation d'équations et inéquations aux dérivées partielles non linéaires de type monotone.
J. Math. Anal. Appl. 34, 502-564 (1971).

[91] Sonntag, Y.: Sur l'approximation des solutions d'une classe d'inéquations.
C.R. Acad. Sci., Paris, Sér. A 286, 551-554 (1978).

[92] Stampacchia, G.: Variational inequalities.
Theory and Applications of Monotone operators, Proc. NATO Adv. Study Institute Venedig 1968, Hrsg.: Ghizzetti, A., 101-192.
Gubbio: Edizioni "Oderisi" 1970.

[93] Trêves, F.: Basic linear partial differential equations.
New York u.a.: Acad. Press 1975.

[94] Vainberg, M.M.: Variational methods for the study of nonlinear operators.
San Francisco u.a.: Holden-Day 1964.

[95] Vainberg, M.M.: Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations.
New York u.a.: Wiley 1973.
Jerusalem u.a.: Israel program for scient. transl. 1973.

[96] Varga, R.S.: Matrix iterative analysis.
Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall 1962.

[97] Vetters, K.: Quadratische Approximationsmethoden zur konvexen Optimierung.
Z. Angew. Math. Mech. 50, 479-484 (1970).

[98] Volker, R.E.: Nonlinear flow in porous media by finite elements.
J. of the Hydraulics Division, Proc. Amer. Soc. of Civil Engineers 95:HY6, 2093-2114 (1969).

[99] Weinelt, W.: On difference approximations of a class of n-dimensional variational inequalities.
Nonlinear Analysis, Theory and Applications, Proc. 7th Int. Summer School, Berlin 1979, Hrsg.: Kluge, R. & Müller, W., 427-431.
Berlin: Akademie Verlag 1981.

[100] Werner, W.: Über ein Penalty-Verfahren zur Lösung nichtlinearer elliptischer Variationsungleichungen mit Hilfe der Finite Element Methode.
Dissertation, Mainz 1977.

[101] Werner, W.: Penalty function methods for the numerical solution of nonlinear obstacle problems with finite elements.
Z. Angew. Math. Mech. 61, 133-139 (1981).

LEBENSLAUF

Karlheinz Hafner	geboren am 23.2.1953 in Augsburg; Eltern: Karl Hafner und Resi Hafner, geb. Weigl
Schulbildung	1959 - 1964 Volksschule in Stadtbergen 1964 - 1973 Jakob-Fugger-Gymnasium, wirtschaftswissenschaftliches Gymnasium der Stadt Augsburg 1973 Reifeprüfung
Studium	1973 - 1981 Studium der Mathematik mit Nebenfach Physik an der Ludwig-Maximilians-Universität München 1981 Diplom-Hauptprüfung
Tätigkeit	seit 1981 wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Ludwig-Maximilians-Universität München